

UNIVERSAL  
LIBRARY

**OU\_224665**

UNIVERSAL  
LIBRARY



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## صغاری احصاء

جلد سوم

تصنیف

ہویر لیمب ایم۔ اے ایل ایل ڈی ایس۔ سی ڈی ایف۔ آر ایس  
ترجمہ

قاضی محمد حسین ایم۔ اے وشن چندا ایم۔ اے

پروفیسر ان گلیہ جامعہ عثمانیہ

۱۳۳۸ھ ۱۳۳۹ھ ۱۹۲۰ء

طبع دارالکتاب دارالعلوم دیوبند

یہ کتاب سرزمینِ ایمان کی ایک پستی کی اجازت سے  
جن کو حق اشاعت حاصل ہے اردو میں ترجمہ  
کر کے طبع و شائع کی گئی ہے



## دیباچہ (از مصنف)

اس کتاب کے پہلے ایڈیشن کے دیباچہ میں یہ بیان کیا گیا تھا کہ اس میں احصا کے اُن حصوں کو سمجھانے کی کوشش کی گئی ہے جو زیادہ تر اس مضمون کے اطلاقات کے لحاظ سے خاص اہمیت رکھتے ہیں اسوقت اسکی ترتیب کچھ غیر معمولی سی تھی لیکن معلوم ہوتا ہے کہ یہ ہولت بخش ثابت ہوئی ہے۔

اس ایڈیشن کی مکمل نظر ثانی کی گئی ہے اور اس میں متعدد تبدیلیاں عمل میں لائی گئی ہیں۔ علاوہ معمولی ترمیمات اور ترتیب کی تبدیلیوں کے ایک دو باتوں کا ذکر کر دینا ضروری معلوم ہوتا ہے۔

ایک خاص باب قوت نما اور اس سے متعلق تفاعلوں کے لئے وقت کر دیا گیا ہے۔ قوت نما تفاعل کی تعریف یہ کی گئی ہے کہ یہ مساوات

$$\frac{فرما}{Q} = \frac{فرما}{Q}$$

کا معیاری حل ہے۔ اس تفاعل کی اہمیت، ریاضیات میں صرف اسی خاصیت کی وجہ سے ہے اور اس لئے اس کی ابتدا اس خاصیت سے کرنا ہی واجب معلوم ہوتا ہے۔ سلسلہ قوت نما کا کوئی نظریہ جو باضابطہ کہلائے جائیگا کچھ مستحق ہو سکتا ہے بالکل ابتدائی نہیں کہنا جاسکتا لیکن

کہنا بیجا ہو گا کہ وہ طریقہ جس کی یہاں پابندی کی گئی ہے علم احصا کے تعلق سے بذکر کسی اور طریقہ سے زیادہ مشکل نہیں اور ہر لحاظ سے قابل ترجیح بھی ہے۔

لامتناہی سلسلوں کی بحث میں خاص طور پر ان کے تفرق اور مکمل کے متعلق کئی تبدیلیاں عمل میں لائی گئی ہیں پچھلی اشاعتوں میں ان سوالوں پر یکساں استنتاج کے نظریہ کی مدد سے عام طریق پر بحث کی گئی تھی، احصا کی کتاب میں اس وقت اس نظریہ کا داخل کر لینا شاید کچھ بیجا نہ تھا جبکہ کسی انگریزی مقالہ میں اس کا ملنا محال تھا لیکن کتاب کے باقی حصہ کے ساتھ موضوع کے لحاظ سے ذرا بے جوڑ ہونے کی وجہ سے اب اس کو ترک کر دیا گیا ہے۔ اس کی بجائے وہ بحث داخل کی گئی ہے جو صرف قومی سلسلوں سے متعلق ہے اور زیادہ تر اسی نمونہ کے سلسلوں سے طالب علم کو واسطہ پڑیگا جب تک کہ وہ مضمون میں زیادہ اعلیٰ مدارج تک ترقی نہ کر جائے۔

کمیت کے مرکزوں، دو درجی معیاروں، اور اسی قسم کی دیگر چیزوں میں اختصار کیا گیا ہے یا انکو ترک کر دیا گیا ہے اور ان کا بیشمار حصہ مصنف کی دوسری کتابوں میں منتقل کر دیا گیا ہے فقط  
جون ۱۹۱۹ء

ہورس لیمب

# فہرست مضامین

صفحہ	مضمون	صفحہ
	<h2>گیارہواں باب</h2> <h3>پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں</h3>	
۵۲۱	تفرقی مساواتوں کی تشکیل -	۱۵۱
۵۲۴	پہلے درجہ اور پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں	۱۵۲
۵۲۶	حل کرنے کے طریقے - ایک متغیر غائب -	۱۵۳
۵۲۷	متغیر حبالہ پذیر -	۱۵۴
۵۳۰	ٹھیک مساواتیں -	۱۵۵
۵۳۳	متجانس مساواتیں	۱۵۶
۵۳۵	مستقل سرور والی پہلے رتبہ کی خطی مساوات	۱۵۷
۵۳۹	پہلے رتبہ کی عام خطی مساوات	۱۵۸

۵۴۱	قائم خطوط رمی -	۱۵۹
۵۴۵	ایک سے اعلیٰ درجہ کی تفرقی مساواتیں	۱۶۰
۵۴۶	تکلیف دی صورت	۱۶۱
۵۴۹	امشکہ نمبری ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴	
<h2>بارہواں باب</h2> <h3>دوسرے رتبہ کی تفرقی مساواتیں</h3>		
۵۶۳	نمونہ $\frac{فر۲}{فر۱} = ف (لا)$ کی مساواتیں	۱۶۲
۵۶۵	نمونہ $\frac{فر۲}{فر۱} = ف (ما)$ کے نمونہ کی مساواتیں -	۱۶۳
	تفرقی مساواتیں جنہیں صرف پہلے اور دوسرے	۱۶۴
۵۷۱	رتبہ کے مشتق موجود ہوں	
۵۷۵	مساواتیں جن میں ایک متغیر موجود نہیں ہے -	۱۶۵
۵۷۸	دوسرے رتبہ کی خطی مساوات	۱۶۶
۵۸۳	امشکہ نمبری ۵۵	
<h2>تیرہواں باب</h2> <h3>مستقل وزن الی خطی مساواتیں</h3>		

۵۹۰	دوسرے رتبہ کی مساواتیں - متمم تفاعل	۱۶۷
۵۹۶	خاص یکجہ کی تعین	۱۶۸
۶۰۳	عامل عطف کی خاصیتیں	۱۶۹
۶۰۴	مستقل سہوں والی عام تفرقی مساوات - متمم تفاعل	۱۷۰
۶۰۹	خاص یکجہ	۱۷۱
۶۱۴	متجانس خطی مساوات	۱۷۲
۶۱۸	ہمزاد تفرقی مساواتیں	۱۷۳
۶۲۸	امشاد نمبری ۵۶، ۵۷، ۵۸	

## چودھواں باب

### قوتی سلسلوں کا تفرق اور یکجہ

۶۳۷	سوال کا بیان	۱۷۴
۶۳۹	لوکارچی سلسلہ کی دریافت	۱۷۵
۶۴۴	گرگجوری کا سلسلہ -	۱۷۶
۶۴۷	قوتی سلسلوں کا استنتاج	۱۷۷
۶۵۱	قوتی سلسلوں کا تسلسل	۱۷۸
۶۵۲	قوتی سلسلہ کا تفرق	۱۷۹
۶۵۴	قوتی سلسلوں کا یکجہ	۱۸۰
۶۵۵	تفرقی مساوات کا تسلسل کے ذریعہ	۱۸۱
۶۵۸	تفرقی مساوات کی مدد سے جیلاؤ	۱۸۲
۶۶۳	امشاد نمبری ۵۹، ۶۰، ۶۱	

## پندرہواں باب

## ٹیلر کا مسئلہ

۶۷۱	پھیلاؤ کی شکل	۱۸۳
۶۷۳	خاص صورتیں	۱۸۴
۶۷۷	سیکلورین اور ٹیلر کے مسائل کا ثبوت :- ن رقوموں کے بعد باقی :-	۱۸۵
۶۸۳	متبیا اول ثبوت	۱۸۶
۶۸۵	کوششی کی باقی کی شکل	۱۸۷
۶۸۷	بعض پھیلاؤ	۱۸۸
۶۹۰	مسئلہ ٹیلر کا اطلاق - منحنیات کا رتبہ تاس	۱۸۹
۶۹۳	اعظم اور اقل قیمتیں	۱۹۰
۶۹۶	مستوی منحنیات کا صغاری ہندسہ -	۱۹۱
۶۹۸	امثلہ نمبری ۶۲ ۶۳	

## سولھواں باب

### متعدد متبوع متغیروں کے تفاعلات

۷۰۵	مختلف رتبوں کے جزوی مشتقات	۱۹۲
۷۰۷	خاصیت مبادیہ کا ثبوت	۱۹۳
۷۱۱	ٹیلر کے مسئلہ کی توسیع	۱۹۴
۷۱۴	پھیلاؤ میں عام رقوم	۱۹۵
۷۱۶	دو متغیروں کے تفاعل کی اقل اور اعظم قیمتیں اور انکی ہندسی تعبیر	۱۹۶

۷۲۲	مشروط تفاعلونکی اعظم اور اقل قیمتیں	۱۹۷
۷۲۵	لفافہ	۱۹۸
۷۲۷	جزوی تفرق کے اطلاقات	۱۹۹
۷۳۰	تضمینی تفاعل کا تفرق	۲۰۰
۷۳۲	تغییر کا بدلتا	۲۰۱
۷۳۵	امثلہ نمبری ۶۲، ۶۵، ۶۶	
۷۳۳	ضمیمہ جات	
	(+)	









$$(A) \dots \dots \dots = \frac{\text{فرما}}{21}$$

مثال ۵۔ ابتدائی (لا - عہ) + (ما - بی) = ۱ - ۲۔۔۔ (۹) میں سے عہ اور ما ساقط کرنے سے مساوات

$$(1) \dots \dots \left\{ \left( \frac{r_1}{r_2} \right) + 1 \right\} = \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2$$

حاصل ہوتی ہے۔ عمل کی تفصیل دفعہ ۱۱۹ میں دی گئی ہے۔

اوپر کے اعمال کی ہندی تعبیر ہو سکتی ہے۔ ابتدائی میں اختیار منقولات کے بدلنے سے جو مساویات حاصل ہوتی ہیں وہ مخنیوں کے کسی قبیل یا نظام کو ظاہر کرتی ہیں۔ تفرقی مساوات (جس میں یہ مستقلات نہیں شریک ہوتے) ان تمام مخنیوں کی کسی خاص مشترک خاصیت کو ظاہر کرتی ہے۔ مثلاً مثال (۲) میں ابتدائی 'مساوی مکانیوں کے' ایسے قبیل کو ظاہر کرتا ہے جس کے محور، لا محور پر مطبق ہوتے ہیں لیکن اسکے راس مختلف نقطوں پر ہیں۔ تفرقی مساوات (۴) ان تمام مخنیوں کی ایک مشترک خاصیت کو ظاہر کرتی ہے اور وہ مشترک خاصیت یہ ہے کہ زیر عماد دے ہوئے مستقل ۲ کے مساوی ہے۔

نیز مثال (۵) کے ابتدائی میں اگر  $\frac{1}{2}$  اور  $\frac{1}{2}$  کو بدلا جائے تو دئے ہوئے

نصف قطر  $r$  کے دائروں کا ایک دوہرا لانتنا ہی نظام حاصل ہوتا ہے ان دائروں

کے مرکز متوی لا  $\frac{1}{2}$  مایں کہیں بھی ہو سکتے ہیں۔ تفرقی مساوات اس خاصیت کو

ظاہر کرتی ہے کہ نصف قطر انخنا ہر جگہ مستقل  $r$  کے مساوی ہے۔ دفعہ ۱۳۵

دیکھو۔

حرکیات سے اور مثالیں دیکھا سکتی ہیں۔

مثال ۶۔ اگر ابتدائی  $\left(\frac{1}{2} \text{ ج ت} + \text{ت} + \text{ب}\right) \dots (۱)$  میں  $\text{ا}$  اور  $\text{ب}$  کو بدلا جائے تو خطی حرکتوں کا ایک خاص گروہ یا جماعت حاصل ہوتی ہے

تفرقی مساوات  $\frac{فرق۱}{فرق۲} = ج$  ..... (۱۲)

اس گروہ کی اس مشترک خاصیت کو ظاہر کرتی ہے کہ اسراع کی مستقل قیمت ج ہے۔  
 مثال ۴۔ نیز ابتدائی (۱) = (جمن ت + ب جب ن ت ... (۱۳)  
 سے مساوات  $\frac{فر}{ت} = ن$  (۱۴) ...

حاصل ہوتی ہے۔ یہ تفرقی مساوات اس بات کو بیان کرتی ہے کہ ابتدائی حل سے حاصل شدہ حرکت میں اسراع '۱' کے مبداء کی جانب ہے اور اسراع کو مبداء سے فاصلہ کیساتھ مستقل نسبت 'ن' ہے۔

مذکورہ بالا مثالوں سے یہ بالکل ظاہر ہے کہ کسی ایسے ابتدائی رشتہ سے جس میں '۱'، '۱' اور ایک یا ایک سے زیادہ اختیاری مستقل تے شامل ہوں ابتدائی تفرقی مساوات کس طرح حاصل ہو سکتی ہے۔ عملی طور پر عموماً اس سوال کا عکس درپیش ہوتا ہے یعنی متغیروں میں عام سے عام ایسا رشتہ دریافت کرنا مطلوب ہوتا ہے جو دی ہوئی تفرقی مساوات کو پورا کرے۔

مثلاً اگر مبداء کی یا حرکیات کی کوئی عام خاصیت ہو جس کو تفرقی مساوات کی شکل میں بیان کیا گیا ہے تو ہم یخنیوں کے اس پورے قبیل کو یا حرکیوں کے اس گروہ کو دریافت کرنا چاہتے ہیں جو یہ خاصیت رکھتے ہوں۔  
 دی ہوئی تفرقی مساوات سے 'متغیروں میں عام رشتہ دریافت کرنے کے عمل کو مساوات کا 'حل کرنا' یا 'مکمل کرنا' کہتے ہیں 'اس عام رشتہ میں مستقلوں کی نسبت' تعداد کا موجود ہونا ضروری ہے 'اس 'نتیجہ کو ہم 'عام حل' یا کامل ابتدائی کہنے متغیروں میں کوئی خاص رشتہ جو مساوات کو پورا کرے 'خاص حل' کہنا ہوتا ہے۔

۱۵۲۔ پہلے درجہ اور پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

پہلے رتبہ کی عام تفرقی مساوات ذیل کی شکل میں لکھی جاسکتی ہے۔

$$ف(لا، ما، فر) = ( \frac{فر}{لا} ) \dots (۱)$$

اس مساوات میں مضمر ہے کہ ما متغیر لا کا قابل تفرق تفاعل ہے اور  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$  مسلسل ہے۔

ایک اختیاری مستقل والے ابتدائی سے پہلے رتبہ کی تفرقی مساوات کے بنائیکے طریقے سے (جود دفعہ ۵۱ میں بتایا گیا ہے) یہ خیال پیدا ہوتا ہے کہ مساوات (۱) کا عام حل ہر صورت میں لا، ما اور ایک اختیاری مستقل پیشمل ہوگا۔ اور دراصل یہ بات صحیح ہے۔ مگر بعض صورتوں میں مساوات کا نادر حل (دفعہ ۱۶۱) ہوتا ہے جس میں اختیاری مستقل نہیں ہوگا۔ اس امر کا باقاعدہ ثبوت مشکل ہے۔ اور اسکو یہاں نظر انداز کرنا بیجا ہوگا کیونکہ ان تمام صورتوں میں جنکے شکل کے عملی طریقے دریافت ہو چکے ہیں ان کے عمل سے ظاہر ہو جاتا ہے کہ حل مذکورہ بالا نوعیت کا ہے۔

عام سوالات میں مساوات (۱) کے دائیں جانب کا رکن  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$  کا منطبق صحیح جبریہ تفاعل ہو گا یا اس شکل میں لایا جا سکیگا۔ مساوات کا ”درجہ“ اس میں  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$  کی بڑی سے بڑی قوت سے مقرر کیا جاتا ہے۔ پہلے درجہ کی عام مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے

$$\text{مر} + \text{کن} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰ \dots \dots \dots (۲)$$

$$\text{یا} \quad \text{مر فرلا} + \text{کن فرما} = ۰ \dots \dots \dots (۳)$$

بس میں مر اور کن متغیرون لا، ما کے دئے ہوئے تفاعل میں نیز شکل (۲) اس کے معادل ہے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = - \frac{\text{مر}}{\text{کن}} = \text{فن} (لا، ما) \dots \dots \dots (۴)$$

اگر لا، ما کی تمام قیمتوں کے لئے فن (لا، ما) حقیقی اور وحید القیمت ہے تو مستوی لا ما کے ہر ایک نقطہ کے جواب میں مساوات (۴) سے

ایک خاص سمت حاصل ہوگی۔ اگر ہم یہ خیال کریں کہ ایک نقطہ 'مستوی' کے کسی مقام سے شروع ہو کر ہمیشہ اس طور پر حاصل شدہ سمت میں حرکت کرتا جائے تو یہ ایک منحنی فرم کر لیا جود ی ہوئی تفرقی مساوات کا ایک خاص حل ہوگا۔ ایسے منحنیوں کے مجموعہ سے ایک واحد لاتناہی نظام حاصل ہوگا۔ اس نظام کے ہر منحنی کا تعین اس نقطہ سے ہو سکیگا جہاں پر یہ منحنی ایک اختیاری خط مستقیم کو قطع کرتا ہے۔ نیز اس سے ظاہر ہے کہ موجودہ صورت میں نظام کے کوئی دو منحنی ایک دوسرے کو قطع نہیں کریں گے۔

پس ہمیں اس امر کا کچھ ذہنی ثبوت حاصل ہو گیا کہ مساوات (۴) کے حل میں صرف ایک اختیاری مستقل ہوگا۔  
اب ہم مختلف صورتوں میں مساوات (۲) کے حل کے معلومہ طریقوں پر غور کریں گے۔

### ۱۵۳۔ حل کرنے کے طریقے۔ ایک متغیر غائب۔

(۱) شکل  $\frac{فر}{لا} = ف (لا)$  ..... (۱)

جس میں 'ا' تشریحی طور پر موجود نہیں ہے صرف سادہ تکمیل سے حل ہو سکتا ہے۔  
مثلاً  $ما = ل ف (لا) فر + ج$  ..... (۲)  
جہاں 'ج' اختیاری مستقل ہے۔

(۳) مساوات  $\frac{فر}{لا} = ف (ما)$  ..... (۳)

جس میں 'لا' تشریحی طور پر موجود نہیں ہے ذیل کی شکل میں لکھی جاسکتی ہے۔  
 $\frac{فر}{ف(ما)} = لا$

[نتیجہ اس کا باقاعدہ ثبوت کوششی نے دیا ہے۔]

جس سے  $\int \frac{\text{فرما}}{f(\text{ما})} = \text{لا} + \text{ج} \dots \dots \dots (۴)$   
 مثال :- وہ مخفی دریافت کو جن میں زیر محاسن مستقل ۱ ہے۔

اب دفعہ ۶۰ سے  $\text{ما} \div \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۱$

یا  $\dots \dots \dots (۵) \quad \frac{\text{فرما}}{\text{ما}} = \frac{\text{فرلا}}{۱}$

اس لئے لوک  $\text{ما} = \frac{\text{لا}}{۱} + \text{ج}$

یا  $\dots \dots \dots (۶) \quad \text{ما} = \text{ب} \text{ ہو } \frac{\text{لا}}{۱}$

جہاں  $\text{ب} = \text{جو}$  اختیار مستقل ہے۔

۱۵۴ - متغیر جدائی پذیر۔

اس کی عام شکل ہے  $\text{فا}(\text{لا}) + \text{ف}(\text{ما}) \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \dots \dots (۱)$

$\text{فا}(\text{لا}) \text{ فرلا} + \text{ف}(\text{ما}) \text{ فرما} = \dots \dots (۲)$

اگر مساوات اس شکل میں لائی جاسکتی ہے تو کہتے ہیں کہ متغیر جدائی پذیر ہیں ۳۸۶  
 ظاہر ہے کہ اس کا حل ہے

$\text{ما} \text{ فرلا}(\text{لا}) + \text{ف}(\text{ما}) \text{ فرما} = \text{ج} \dots \dots (۳)$

مثال ۱ - وہ مخفی دریافت کرو جنکے تمام عماد ایک نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

اگر اس نقطہ کو قائم محوروں کا مبدأ مان لیں تو دی ہوئی شرط سے مائل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = - \frac{\text{لا}}{\text{ما}}$$

$$(۴) \dots\dots\dots یا لا فر لا + ما فر ما =$$

$$(۵) \dots\dots\dots اس لئے لا + ما = ج$$

پس مطلوبہ منحنی ایسے دائرے میں جبکہ مرکز مبدأ ہے۔

مثال ۲۔ ایسا منحنی دریافت کرو کہ کسی بیرونی نقطہ سے اس کے

تمام تماس مساوی ہوں۔

اگر اس کے ایک ثابت تماس کو ابتدائی خط فرض کریں اور نقطہ تماس کو مبدأءِ تو ابتدائی خط کے کسی نقطہ سے کھینچے ہوئے دونوں تماس کے مساوی ہونے کی شدہ دفعہ ۶۳ کی ترقیم کے مطابق  $فما = طما$  ہے

$$(۶) \dots\dots\dots اور اس لئے  $\frac{ک فر طما}{فر ک} = مس طما$$$

$$(۷) \dots\dots\dots پس  $\frac{فر ک}{ک} = مم طما$$$

$$اور لوک ک = لوک جب طما + ج$$

$$(۸) \dots\dots\dots یا س = ا جب طما$$

جہاں  $ا$  اختیاری مستقل ہے۔

اُس لئے صرف دائرہ ہی ایسا منحنی ہے جو دی ہوئی شرط کو پورا کرتا ہے۔

مثال ۳۔ ایک ذرہ ایسی قوت کشش کے زیرِ عمل جو ایک ثابت نقطہ سے فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے خط تقسیم میں حرکت کر رہا ہے۔ اس کی حرکت کی



مساوات یہ ہے

$$(۹) \dots\dots\dots \frac{۴}{۲} = \frac{۶}{۲} \dots\dots\dots$$

بلحاظ لا کے تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱}{۲} = \frac{۴}{۲} + \dots\dots\dots (۱۰) \dots\dots\dots$$

اگر لا = ∞ کے لئے ۶ صفر ہو تو م = ۰

ایسی صورت میں قوت کے مرکز سے فاصلہ ۱ پر ذرہ کی رفتار  $\sqrt{\frac{۴}{۲}}$

$$\frac{۴}{۲} = \frac{۴}{۲}$$

یا ۲ ج ۱ ہوگی اگر ج =

پس حالت سکون سے بہت بڑے فاصلہ سے گزرنے والا ذرہ جسکے حالات کوئی فراہمیت عمل نہ کرے اس رفتار سے سطح زمین پر پہنچے گا جہاں زمین کا نصف قطر ہے اور ج سطح پر اس طرح بجاذبہ ارض ہے۔

مثال ۴۔ یکساں افقی بوجہ والے متعلق بل میں زخمی کی شکل اس شرط سے حاصل ہوتی ہے کہ زخمی کے کوئی دو ماس و تر تاس کی تنصیف کرنے والے انقباضی پر قطع کرتے ہیں۔

اگر زیر ترین نقطہ قائم محوروں کا مبدأ لیا جائے اور اس نقطہ کا ماس لا محور ہو تو زخمی کے کسی نقطہ کا زیر ماس نصف فاصلہ کے مساوی ہوگا۔

$$\text{پس} \quad \frac{۱}{۲} = \frac{۴}{۲}$$

$$(۱۱) \dots\dots\dots \frac{۴}{۲} = \frac{۴}{۲}$$

اس کا محمل ہے لوک ما = ۲ لوک لا + م (مستقل)

$$(۱۲) \dots\dots\dots \frac{۴}{۲} = \frac{۴}{۲}$$

جہاں  $\Delta$  اختیاری ہے۔  
یعنی زنجیر کی شکل قطع مکانی ہے جس کا محور انتقابی ہے۔

## ۱۵۵۔ ٹھیک مساواتیں۔

دفعہ گذشتہ دراصل ٹھیک مساوات کے عنوان کے ماتحت آتی ہے۔  
مساوات  $\Delta$  فرلا +  $\Delta$  فرما = ۰ ..... (۱)  
اُس صورت میں ”ٹھیک“ تفرقی مساوات کہلائے گی جبکہ  $\Delta$  اور  $\Delta$   
بالترتیب  $\frac{\text{جف } \Delta}{\text{جف } \Delta}$  اور  $\frac{\text{جف } \Delta}{\text{جف } \Delta}$  کی شکل کے ہوں۔

مساوات  $\Delta$  فرلا +  $\Delta$  فرما = ۰ ..... (۲)

معادل ہے فرما = ۰ ..... (۳)

کے اور اسکا مکمل ہے  $\Delta = \text{ج}$  ..... (۴)  
جہاں  $\text{ج}$  اختیاری مستقل ہے۔

یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ (۱) کے نمونہ کی ہر مساوات یا تو ”ٹھیک“ ہے  
یا مناسب مکمل جزو ضربی سے ضرب دیکر ”ٹھیک“ بنائی جاسکتی ہے نیز  
ایسے اجزائے ضربی کی تعداد غیر محدود ہے، کیونکہ اگر ہم فرض کر لیں کہ مساوات  
(۱) شکل (۲) میں لائی جا چکی ہے تو اسے  $\Delta$  (۶) سے ضرب دینے پر  
بھی یہ ”ٹھیک“ رہے گی جہاں  $\Delta$  (۶) متغیر کا کوئی تفاعل ہے۔

$\Delta$  (۶) فرما = ۰ ..... (۵)

کا مکمل ہے  $\Delta$  (۶) =  $\text{ج}$  ..... (۶)  
اور یہ صریحاً (۴) کے معادل ہے۔

[ \* اس بات کے دریافت کرنیکا قاعدہ کہ پہلے درجہ کی دی ہوئی مساوات ٹھیک  
ہے یا نہیں دفعہ ۱۹۳ میں دیا گیا ہے ]

مثال ۱۔ (۱ لا + ۲ ما + ۳ گ) فر لا + (۲ لا + ۳ ب + ۴ ف) فر ما = ۰ ..... (۷)

یہ معادل ہے

فر (۱ لا + ۲ ما + ۳ گ) فر لا + ۲ ما + ۳ ب + ۴ ف = ۰ ..... (۸)  
 کے پس (۱ لا + ۲ ما + ۳ گ) فر لا + ۲ ما + ۳ ب + ۴ ف = ج ..... (۹)  
 مثال ۲۔ لا فر لا + ما فر ما = گ (لا فر ما - ما فر لا) ..... (۱۰)  
 یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$\text{فر (لا + ما)} = ۲ \text{ گ لا فر (} \frac{\text{ما}}{\text{لا}} \text{)} \dots \dots \dots (۱۱)$$

اور اس لئے (لا + ما) سے تقسیم کرنے پر ٹھیک مساوات بن جاتی ہے۔ پس

$$\text{فر (لا + ما)} = \frac{۲ \text{ گ فر (} \frac{\text{ما}}{\text{لا}} \text{)}}{\frac{\text{ما}}{\text{لا}} + ۱} \dots \dots \dots (۱۲)$$

اس لئے تکمیل کرنے پر

$$\text{لوک (لا + ما)} = ۲ \text{ گ مسن (} \frac{\text{ما}}{\text{لا}} \text{)} + ج \dots \dots \dots (۱۳)$$

مساوات (۱۰) ذیل کی طرح بھی حل کی جاسکتی ہے۔

ابدال لا = سر جم طما اور ما = سر جب طما ..... (۱۴)  
 سے لا فر لا + ما فر ما = سر فر سر اور لا فر ما - ما فر لا = سر فر طما ..... (۱۵)  
 اس طرح مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{فر سر} = \text{گ فر طما} \dots \dots \dots (۱۶)$$

$$\text{پس لوک سر} = \text{گ طما} + ج \dots \dots \dots (۱۷)$$

اور یہ صریحاً (۱۳) کے معادل ہے۔

مثال ۳۔ ایسے گردشیں مجسم کی شکل دریافت کر جس میں کسی عمودی تراش سے



ابتدائی سوال سے ذرا زیادہ عام ہے۔ درحقیقت اگر (۱۸) سے دونوں محدود تکنیکوں کے نیچے کی حدود بجائے صفر کے کچھ اور مستقل کر دی جائیں تو بھی تقریبی مساوات وہی حاصل ہوگی۔ اس لئے تجربی طور پر اس بات کی تصدیق ضروری ہے کہ آیا حاصل شدہ حل ابتدائی مساوات کو پورا کرتا ہے یا نہیں۔ یہ تصدیق  $n < 2$  کے لئے آسانی سے ہو سکتی ہے۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ اگر  $n = 3$  تو جسم گردش کی مکانی نما ہے اور اگر  $n > 3$  تو یہ مخروط ہے۔

### ۱۵۶۔ متجانس مساواتیں۔

فرض کرو کہ مساوات  $م + ن = \frac{فرما}{فرلا}$  میں  $م$  اور  $ن$  متغیر ہیں  
لا، ما کے ایک ہی درجہ کے متجانس تفاعل ہیں۔

اس صورت میں کسر  $\frac{م}{ن}$  صرف  $\frac{ما}{لا}$  کا تفاعل ہے۔ اور اس لئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\frac{فرما}{فرلا} = ف \left( \frac{ما}{لا} \right) \dots \dots \dots (۱)$$

$$اگر ما = لا و تو \frac{لا فرو}{فرلا} + و = ف (و) \dots \dots (۲)$$

اس میں متغیر لا، و جدائی پذیر ہیں اور اس لئے

$$\frac{فرلا}{لا} = \frac{فرو}{ف (و) - و} \dots \dots \dots (۳)$$

$$پس لو کہ لا = ر \frac{فرو}{ف (و) - و} + ج \dots \dots \dots (۴)$$

مکمل کے بعد اس میں  $و = \frac{ما}{لا}$  لکھنا ہوگا۔

مثال :-  $(1 - \frac{1}{n})^n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$  ..... (۵)

اس میں  $\frac{\frac{6}{r_2} r}{\frac{6}{r_2} - 1} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$  ..... (۶)

$$\frac{9^2}{9-1} = 9 + \frac{9 \text{ فر } 9}{9 \text{ فر } 9}$$

یعنی  $\frac{\text{لا فروزا}}{\text{فزا لا}} = \frac{\text{و(۱+و)}}{\text{۱-و}}$

اس لیے  $\frac{فرلا}{لا} = \frac{فر(1+فر)}{(1+فر)} = \left[ \frac{فر}{1+فر} - \frac{1}{فر} \right] فر \dots (4)$   
 شکل کرنے سے  $لوک لا = لوک و - لوک (1+فر) + مستقل$

یہ معاملہ ہے لا (۱ + ۱) = ج و

اس کی ہندسی تعبیر یہ ہے کہ متجانس تقریقی مساوات کا عام حل 'متشابه' اور 'مشتاب' (۸) طور پر رکھے ہوئے متعینوں کے ایک قبیل کو ظاہر کرتا ہے جس میں تشابہت کا مرکز مبداء ہے۔ کیونکہ مساوات (۱) سے ظاہر ہے کہ جہاں متعینات 'مبداء' میں گزرنے والے

کسی اختیاری فط  $\frac{6}{12} = 50\%$  کو قطع کرتے ہیں وہاں  $\frac{6}{12}$  فرما کی قیمت ہر منہنی

کے لئے وہی ہے یعنی ماس تنوازی میں۔

مثلاً مذکورہ بالا مثال میں مساوات کا حل دائروں کے ایک قبیل کو ظاہر کرتا ہے جو لا محذور کو مبداءِ ریس کرتے ہیں۔

اب اگر (۴) میں ج = لوک ج رکھیں تو  $\frac{m}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}$  یا  $\frac{m}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}$  متغیر ج کے تفاعل کی شکل میں دریافت ہوتا ہے۔ بالفاظ دیگر ابتدائی عمل  $\lambda$  کا اور ج میں تناسب ہے

اور اس لئے یہ شکل ذیل کا ہوگا

$$\text{فما} \left( \frac{\text{لا}}{\text{ج}}, \frac{\text{ما}}{\text{ج}} \right) = \dots \dots \dots (۹)$$

یہ امر مذکورہ بالا ہندسی خاصیت کے مطابق ہے کیونکہ اگر لا، ما اور ج کو ایک ہی نسبت میں بدلا جائے تو مساوات (۹) میں کوئی تغیر نہیں ہوتا۔ یعنی ج کی قیمت کے بدل دینے سے منحنی کا صرف پیمانہ بدل جاتا ہے۔

### ۱۵۷۔ مستقل سروں والی پہلے رتبہ کی خطی مساوات ۳۹۱۔

کوئی مساوات جس میں ما اور اسکے مشتق صرف پہلے درجہ میں شریک ہوئے ہیں، خطی مساوات کہلاتی ہے۔ پس پہلے رتبہ کی خطی مساوات ذیل کی شکل کی ہوگی

$$\text{فرما} + \text{پ ما} = \text{ق} \dots \dots \dots (۱)$$

جہاں پ اور ق، لا کے معلومہ تفاعل ہیں۔ پہلے ہم اس صورت پر غور کریں گے جبکہ پ مستقل ہو کیونکہ بعد میں یہ صورت کارآمد ثابت ہوگی۔

$$\text{اب مساوات ہے} \quad \text{فرما} - \text{ما} = \text{ق} \dots \dots \dots (۲)$$

اگر ق = ۰ تو دفعہ ۳۸ سے ملے

$$\text{ما} = \text{ج} \text{ ہو} \dots \dots \dots (۳)$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ جزو ضربی قو مساوات (۲) کے دائیں جانب کو ٹھیک مشتق بنا دیتا ہے۔ اس سے عام صورت (جبکہ ق = ۰) کے حل کی ترکیب حاصل ہوتی ہے۔

$$\text{پس مساوات (۲) معادل ہے} \quad \text{فرما} - \text{قو ما} = \text{ق} \text{ ہو} \dots \dots \dots (۴)$$

کے اور اس کے  $\text{قو}^{\text{لا}} \text{ما} = \text{ق}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{فرلا} + \text{ج}^{\text{لا}}$

یعنی  $\text{ما} = \text{قو}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{فرلا} + \text{ج}^{\text{لا}} \text{قو}^{\text{لا}}$  ..... (۵)

مروجہ دستور (دیکھو دفعہ ۱۶۶) کے مطابق (۵) کے بائیں جانب کی پہلی رقم کو خاص تکملہ اور دوسری رقم کو متمم تفاعل کہتے ہیں۔

ذیل کی صورتیں اہم ہیں  $\text{قو}^{\text{لا}}$

(۶) ..... اگر  $\text{ق} = \text{ج}^{\text{لا}} \text{قو}^{\text{لا}}$

تو  $\text{ق}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{فرلا} = \text{ج}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{فرلا} = \text{ق}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{فرلا} \times \frac{\text{ج}^{\text{لا}}}{\text{ق}^{\text{لا}}}$

اور  $\text{ما} = \text{ق}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{فرلا} + \text{ج}^{\text{لا}} \text{قو}^{\text{لا}}$  ..... (۷)

دیکھنے سے فوراً بتدقیق ہو سکتی ہے کہ بائیں جانب کی پہلی رقم دی ہوئی مساوات کا خاص تکملہ ہے۔

(۲) نتیجہ (۷) کی تصحیح کی ضرورت ہوگی جبکہ  $\text{ق}^{\text{لا}} = \text{ق}^{\text{لا}}$

یعنی  $\text{ق} = \text{ج}^{\text{لا}} \text{قو}^{\text{لا}}$  ..... (۸)

اس صورت میں  $\text{ق}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{فرلا} = \text{ج}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{فرلا} = \text{ق}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{فرلا} = \text{ج}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{فرلا}$

اور  $\text{ما} = \text{ج}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{فرلا} + \text{ج}^{\text{لا}} \text{قو}^{\text{لا}}$  ..... (۹)

(۱۰) ..... اگر  $\text{ق} = \text{ج}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{قو}^{\text{لا}}$

تو  $\text{ق}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{فرلا} = \text{ج}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{فرلا} = \text{ق}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{فرلا} \times \frac{\text{ج}^{\text{لا}}}{\text{ق}^{\text{لا}}}$

اور  $\text{ما} = \text{ج}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{فرلا} + \text{ج}^{\text{لا}} \text{قو}^{\text{لا}}$  ..... (۱۱)



مثال (۱)۔ اگر کسی ذرہ پر فراحت رقبہ کے متناسب ہو اور وقت کے معلومہ تفاعل کے مساوی کوئی قوت اس پر عمل کر رہی ہو تو اس حرکت کی مساوات ذیل کی شکل کی ہوگی۔

$$\text{فرت} = \frac{\text{فرع}}{\text{ک}} + \text{ع} = \text{ف (ت)} \dots \dots (۱۲)$$

اس کا مکمل ہے

$$\text{ع} = \text{مر فو} + \text{ک ت} - \text{ک ت} \text{ فو} \text{ ف (ت) فرت} \dots (۱۳)$$

مثلاً اگر ف (ت) = ج

$$\text{تو ع} = \text{مر فو} + \text{ک ت} - \text{ج} \dots \dots (۱۴)$$

یہ نتیجہ تقریبی مساوات کو ذیل کی شکل میں لکھنے سے زیادہ آسانی سے حاصل ہو سکتا ہے۔

$$\text{فرت} = \frac{\text{ع} - \text{ج}}{\text{ک}} + \frac{\text{ج} - \text{ع}}{\text{ک}} = \dots \dots (۱۵)$$

$$\text{اس لئے ع} - \frac{\text{ج}}{\text{ک}} = \text{مر فو} - \text{ک ت} \dots \dots (۱۶)$$

جیسے ت بڑھتا ہے ع متغیراً انتہائی قیمت ج اختیار کرتا ہے۔

مثال (۲)۔ اگر (طاقت کی برقی رو ایک درمیں سے بہہ رہی ہو اور دوسری ذاتی امالیت کی شرح ل ہو اور فراحت ز اور دوسری قوت محرکہ برق ق ہو تو مساوات

$$\text{مائل ہوتی ہے ل} = \frac{\text{فرت}}{\text{ز لا}} + \text{ق} \dots \dots (۱۷)$$

اگر ق مستقل ہو تو اس کا حل ہے

$$\text{لا} = \frac{\text{ق}}{\text{ز}} + \text{ج} \text{ فو} - \text{ز ت} \dots \dots (۱۸)$$



کم کر دیتی ہے اور ہیئت کو بطور ظہا کے پیچھے ہٹا دیتی ہے۔

۱۵۸۔ پہلے رتبہ کی عام خطی مساوات۔

اب ہم پہلے رتبہ کی عام خطی مساوات

$$(۱) \quad \text{فرلا} \div \text{پ} = \text{ما} = \text{ق} \dots\dots\dots$$

پر غور کریں گے۔

$$(۲) \quad \text{اگر ق} = ۱ \text{ تو } \frac{۱}{\text{ما}} \times \frac{\text{فرلا}}{\text{پ}} = \text{پ} = \dots\dots\dots$$

اس لئے لوگ ما + پ فرلا = ا

$$(۳) \quad \text{یعنی } \text{ما} \times \text{پ فرلا} = \text{ج} \dots\dots\dots$$

اس سے ظاہر ہے کہ ہو پ فرلا نتیجہ (۱) کا متکمل جزو ضروری ہے کہ وہ کم

$$\text{پ فرلا} \times \left( \frac{\text{فرلا}}{\text{پ}} + \text{ما} \right) = \frac{\text{فرلا}}{\text{پ}} \times \text{ما} \text{ ہو}$$

اس لئے مساوات (۱) ذیل کی شکل میں لکھی جاسکتی ہے

$$(۴) \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{پ}} \times \text{ما} \text{ ہو} = \text{ق} \text{ ہو} \times \text{پ فرلا} \dots\dots\dots$$

$$(۵) \quad \text{اور متکمل کرنے سے } \text{ما} \text{ ہو} = \text{ق} \text{ ہو} \times \text{پ فرلا} + \text{ج} \dots\dots\dots$$

متکمل جزو ضروری عموماً مساوات کے صرف دیکھنے سے ہی معلوم ہو سکیگا اور اوپر کے قاعدہ کی ضرورت نہیں ہوگی۔

$$(۶) \quad \text{مثال (۱)۔} \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{پ}} + \text{ما مم لا} = ۲ \text{ جم لا} \dots\dots\dots$$

یہاں پ = مم لا، کپ فرلا = لوک جب لا،  
 کپ فرلا = جب لا

اس لئے جب لا سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{فرلا} \cdot \text{ما جب لا} = ۲ \cdot \text{جب لا جم لا} \dots \dots \dots (۷)$$

$$\text{یا } \text{ما جب لا} = \text{جب لا} + \text{ج}$$

$$\text{اس لئے ما} = \text{جب لا} + \frac{\text{ج}}{\text{جب لا}} \dots \dots \dots (۸)$$

$$\text{مثال (۲) - (۱ - لا)} \cdot \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{لا ما} = ۱ \dots \dots \dots (۹)$$

(۱ - لا) سے تقسیم کرنے سے

$$\text{فرلا} \cdot \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{لا}}{\text{فرلا}} = \text{ما} = \frac{۱}{۱ - لا} \dots \dots \dots (۱۰)$$

$$\text{یہاں پ} = \frac{\text{لا}}{\text{فرلا}} \cdot \text{کپ فرلا} = \frac{۱}{۱ - لا} \cdot \text{لوک (۱ - لا)} \cdot \text{فو} = \frac{۱}{۱ - لا} \cdot \text{کپ فرلا}$$

نتیجہ (۱۰) کو شکل جزو ضربی کے ساتھ ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے

$$\sqrt{۱ - لا} \cdot \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{لا}}{\sqrt{۱ - لا}} = \text{ما} = \frac{۱}{\sqrt{۱ - لا}}$$

$$\text{یا } \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} \cdot (۱ - لا) = \text{ما} = \frac{۱}{\sqrt{۱ - لا}} \dots \dots \dots (۱۱)$$

اور تکمیل کرنے سے  $\sqrt{۱ - لا} = \text{ما} = \text{جب لا} + \text{ج}$

$$\text{یعنی } \text{ما} = \frac{\text{جب لا}}{\sqrt{۱ - لا}} + \frac{\text{ج}}{\sqrt{۱ - لا}} \dots \dots \dots (۱۲)$$

$$\text{مثال (۳) } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ن} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \text{لا}^۲ \dots \dots \dots (۱۳)$$

متکمل جزو ضربی واضح ہے اور عمل یہ ہے

$$\frac{ن \text{ فرما}}{ن} + \frac{ن-۱}{ن} = \frac{ن+۱}{ن}$$

$$یا \frac{ن}{ن} + \frac{ن+۱}{ن} = \frac{ن+۱}{ن}$$

$$اِس لئے ما = \frac{ن}{ن+۱} + \frac{ن-۱}{ن+۱} = \frac{ن+ن-۱}{ن+۱} = \frac{۲ن-۱}{ن+۱} \quad (۱۳)$$

۱۵۹۔ قائم خطوط رومی۔

فرض کرو کہ واحد لاتن ہی مخفیات کا ایک قبیل ہے

$$\text{فما (لا، ما، ج) = ۰ \dots \dots \dots (۱)}$$

جہاں ج تبدیل ہے۔ ایسے مخفیات کی مساوات دریافت کرنی ہے جو اس قبیل کو ہر جگہ زاویہ قائمہ پر قطع کریں۔

پہلے ہم قبیل کی تفرقی مساوات مرتب کرتے ہیں اس کے لئے (۱) کو بلحاظ (لا) کے تفریق کر کے ج کو سا قف کرنا چاہئے۔ دفعہ (۱۵۱) دیکھو۔ اگر دو مخفی ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کریں اور اگر نقاط تقاطع پر ان کے ماس لا محور سے ناویہ سا اور سسا بنائیں تو

$$\text{سا۔ سسا} = \pm \frac{\pi}{۲}$$

اور اسلئے مس سسا = - مم سسا پس ایک قبیل کی تفرقی مساوات دوسرے قبیل کی تفرقی مساوات میں

$$\text{فرما کی بجائے} - \frac{۱}{ن} \text{ لکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔}$$

بطریق دیگر :- اگر فرلا اور فرما قبیل (۱) کے کسی مخفی کے چھوٹے

$$\text{جزو کے ظل ہوں تو} \quad \frac{\text{جف فرلا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فما}}{\text{جف فزلا}} = \dots \dots \dots (۲)$$

پس اگر فرلا اور فرما علی القیوم منحنی کے نقطہ (لا، ما) میں سے گزرنیوالے  
چھوٹے سے جزو کے ظل ہوں تو  $\frac{\text{جف فرلا}}{\text{جف فئا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{جف فئا}}$  ..... (۳)

اور قائم خطوط رومی کی تفرقی مساوات (۱) اور (۳) میں سے ج کو ساقط  
کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔  
اگر منحنیات کے دئے ہوئے قبیل کی مساوات قطبی محدودوں میں یہ ہو

ف (ز، طما، ج) = ..... (۴)  
اور اگر منحنی اور خط رومی کے تماس سمتی نیم قطر کے ساتھ بالترتیب زاویہ  
فما اور فئا بنائیں تو مذکورہ بالا طریقہ سے ظاہر ہے کہ  
مس فئا = مم فئا

پس ایک قبیل کی تفرقی مساوات دوسرے قبیل کی تفرقی مساوات  
میں  $\frac{\text{فرطما}}{\text{فر}} کی بجائے - \frac{1}{\text{فرطما}}$  لکھنے سے حاصل ہوگی  
اب (۴) کو تفرق کرنے سے

$$(۵) \quad \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ر}} \text{ فر} + \frac{1}{\text{ر}} \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طما}} \times \text{فرطما} = \dots$$

اس لئے خط رومی کے لئے

$$(۶) \quad \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ر}} \text{ فرطما} - \frac{1}{\text{ر}} \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طما}} \text{ فر} = \dots$$

ج کو (۴) اور (۶) میں سے ساقط کرنے سے مطلوبہ قبیل کی تفرقی مساوات  
حاصل ہوتی ہے۔

مثال (۱) قائم زائدوں لا ما = ج ..... (۷)  
کے قائم خطوط رومی دریافت کرو۔

تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے لا فرما + ما فرلا = ..... (۸)

پس خطوط رمی کے لئے لا فر لا - ما فر ما = ..... (۹)  
 اس لئے لا - ما = ج ..... (۱۰)  
 یہ مساوات قائم زائدوں کے قبیل کو ظاہر کرتی ہے جس کے مجاور سمت میں  
 پہلے قبیل کے متقاربوں پر منطبق ہوتے ہیں -

مثال (۲) دائروں لا + ما + ۲ مہا - ما - ک = ..... (۱۱)  
 (جہاں مہا متبادل ہے) کے قائم خطوط رمی دریافت کرو -  
 تفرق کرنے سے لا فر لا + (ما + مہا) فر ما = .....  
 پس رمی کے لئے لا فر ما - (ما + مہا) فر لا = .....  
 اس مساوات اور (۱۱) میں سے مہا کے ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے  
 ۲ لا ما فر ما + لا - ما - ک = ..... (۱۲)

یا لا فر ما - (ما) - ما = لا + ک ..... (۱۳)  
 تابع متغیر ما کے لحاظ سے یہ خطی مساوات سے - دفعہ ۱۵۰ کے ضابطہ سے  
 یا صرف دیکھنے سے ظاہر ہے کہ شکل خنود ضربی  $\frac{1}{2\lambda}$  ہے - پس اسکی عدد سے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر}} \left( \frac{\text{ما}}{\lambda} \right) = -1 + \frac{\text{ک}}{2\lambda}$$

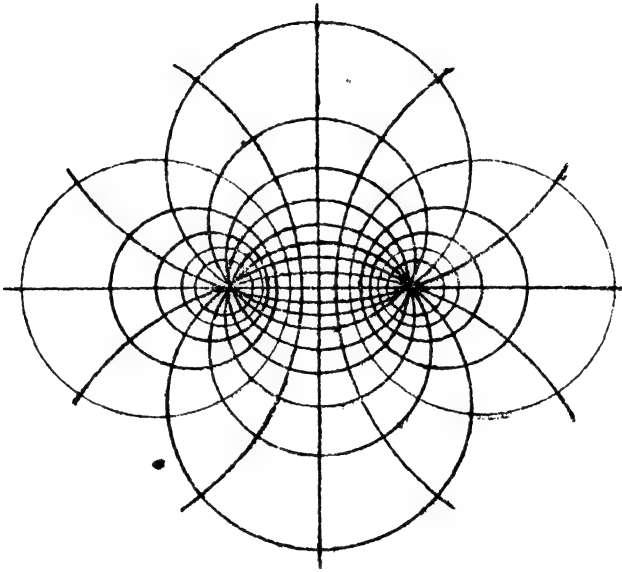
$$\text{اس لئے } \frac{\text{ما}}{\lambda} = -1 - \frac{\text{ک}}{\lambda} + ۲\omega$$

یعنی لا + ما - ۲\omega - لا = ک ..... (۱۴)  
 جہاں لہذا اختیار ہے -

۳۹۷ ابتدائی مساوات ہم محور دائروں کے ایک نظام کو ظاہر کرتی ہے جو لا محور کو  
 نقاط (= ک) پر قطع کرتے ہیں، خطوط رمی (۱۴)، ہم محور دائروں کا  
 ایک دوسرا نظام ہے جس کے انتہائی نقطے 'یہ نقطے ہیں - یعنی اگر دیکھیں

لہذا  $\pm$  گ کے نقطے دائرے حاصل ہوتے ہیں

(۱۵) .....  $(\pm g)^2 + a^2 = -$  شکل ۱۳۵ دیکھو۔



شکل (۱۳۵)

مثال (۳) دائرے  $r =$  ج جہ طہ ..... (۱۶) .....  
مبدأ میں سے گزرتے ہیں اور انکار مرکز تبدائی خط پر ہے اور

(۱۷) .....  $\frac{فر}{ر} = -$  سس طہ فرطہ

پس خطاری کے لئے ر فرطہ = سس طہ فر

(۱۸) ..... یعنی  $\frac{فر}{ر} = مم طہ فرطہ$

تکمیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے



لوک ر = لوک جب ط + مستقل

یا ر = ج جب ط ..... (۱۹)  
یہ مساوات دائروں کے ایک دوسرے نظام کو ظاہر کرتی ہے جو میدان میں سے گزرتے ہیں اور ابتدائی خط کو مس کرتے ہیں۔

۱۶۰۔ ایک سے اعلیٰ درجہ کی تفرقی مساواتیں۔

پہلے رتبہ اور ن ویں درجہ کی عام تفرقی مساوات اس شکل کی ہوگی

$$ع^{\text{ن}} + ف^{\text{ن}} ع^{\text{ن-۱}} + ف^{\text{ن-۱}} ع^{\text{ن-۲}} + \dots + ف^{\text{ن-ن}} ع^{\text{ن-ن}} + ف^{\text{ن}} = ۰$$

(۱) .....

جہاں  $ع = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$  ..... (۲)

اور ف، ف، ف، .....، فن متغیروں لا، ما کے معلومہ  
تفاعل ہیں اور عموماً یہ مان لیا جاتا ہے کہ یہ تفاعل جبریہ اور منطقی ہیں۔  
چونکہ مساوات (۱) ع میں ن ویں درجہ کی ہے، اس سے ظاہر ہے  
مستوی لا یا میں کے ہر مقررہ نقطہ میں سے ابتدائی منحنیات کی ن  
شاخیں گزرتی ہیں۔ یہ ممکن ہے کہ ان میں سے چند شاخیں خیالی ہوں  
یا لا اور ما کے خاص حدود کے لئے سب شاخیں خیالی ہوں نیز ممکن  
ہے کہ ایسے نقاط کا طریق جہاں ع کی دو مساوی قیمتیں ہیں حقیقی ہو۔  
تفرقی مساوات کی اعلیٰ تحقیقات میں یہ طریق خاص اہمیت رکھتا ہے۔  
مثال۔ دوسرے درجہ کی مساوات

$ع^2 + ف^2 ع + ق = ۰$  ..... (۳)  
میں ع کی اہلیں حقیقی اور جلد گانہ ہونگی یا منطبق یا خیالی ہو جب اسکے کمر  
ف، ق، م ق۔ اور ع کی دو مساوی قیمتوں کے نقاط کا طریق

منفی ف<sup>۲</sup> = م<sup>۲</sup> ق ہوگا۔

اگر (۱) کا دایاں رکن، بلحاظ ع کے خطی اجزاء میں تحویل ہو سکے تو

$$(ع - ۱) (ع - ۲) (ع - ۳) \dots (ع - ۴) = ۰ \dots (۴)$$

جہاں ع<sub>۱</sub>، ع<sub>۲</sub>، ع<sub>۳</sub>، ع<sub>۴</sub> متغیروں لا، ما کے معلومہ تفاعل ہیں۔

مکمل حل ذیل کی جگہ گانہ مساواتوں کے حل کا مجموعہ ہوگا:

$$\frac{فرما}{فرلا} = ع_1, \frac{فرما}{فرلا} = ع_2, \dots, \frac{فرما}{فرلا} = ع_n \dots (۵)$$

مثال: لا ما ع<sub>۱</sub> - (لا<sup>۲</sup> - ما<sup>۲</sup>) ع - لا ما = ۰ ..... (۶)  
یہ اس کے معادل ہے

$$(لا + ع + ما) (لا - ع - ما) = ۰ \dots (۷)$$

اور لا ع + ما = ۰، ع - لا = ۰ کے حل بالترتیب ہیں

$$لا ما = ج, لا - ما = ج \dots (۸)$$

(۶) سے دی ہوئی ع کی دو قیمتوں کا حاصل ضرب (-۱) ہے اس سے ظاہر ہے کہ کسی نقطہ لا، ما میں سے گزرنیوالے ابتدائی متعینات کی دو شاخیں ایک دوسرے پر علی القوا<sup>۱</sup>م ہیں۔ دفعہ ۱۵۹ کی مثال (۱) دیکھو۔

## ۱۶۱۔ کلیری صورت (۳۹۹)

جب دفعہ ۶۰ کی مساوات (۱) آسانی سے خطی اجزاء میں تحویل نہ ہو سکے تو خاص صورتوں میں اور طریقہ استعمال کئے جاسکتے ہیں، لیکن ان طریقوں کا استعمال بہت محدود ہے اور اس لئے انہیں یہاں بحث میں نہیں لایا جائیگا۔ مگر کلیری صورت کو اس سے مستثنیٰ کیا جائیگا کیونکہ اس کا اصول بہت سادہ ہے اور ایسے مخفیوں کی صورت میں جلی تعریف کسی عام سی خاصیت کی بنا پر کی گئی ہو وہ شکل اکثر پیدا ہوتی ہے۔ اگر  $\frac{فرما}{فرلا}$  کی بجائے ع لکھیں تو زیر غور صورت ہوگی

ما = لا + ع + ف (ع) ..... (۱)  
 دفعہ ۶۰ میں ثابت کیا گیا ہے کہ منحنی کے حماس کے مقطوع لا اور ما  
 محوروں پر عہا، بہا، ہوں تو

$$ع = \frac{لا - ع}{ع} \text{ اور } بہا = ما - لا + ع \dots\dots\dots (۲)$$

پس (۱) کی صورت کی مساوات کسی ایک مقطوعہ اور حماس کی  
 سمت میں ربط یا دونوں مقطوعوں میں ربط کو ظاہر کرتی ہے\*  
 اب ظاہر ہے کہ کسی خط مستقیم کی مساوات جبکہ مقطوعوں میں دیا ہوا  
 رشتہ ہے مذکورہ بالا ربط کو پورا کر کے گی۔ ایسے خط کے ہر نقطہ پر

$$ع = ج \dots\dots\dots (۳)$$

اور اس لئے حل ہے

$$ما = ج + لا + ف (ج) \dots\dots\dots (۴)$$

جہاں ج اختیاری مستقل ہے۔

لیکن اس مساوات کو وہ معنی بھی پورا کرے گا جس کے حماس، قبیل  
 (۴) کے خطوط ہیں یعنی بہ الفاظ دیگر وہ معنی جو اس قبیل کا لفاف ہے۔  
 لفاف کی مساوات اس شرط سے حاصل ہوتی ہے کہ ج میں مساوا  
 (۴) کی دو اصلیں برابر ہیں یعنی (۴) اور

$$لا + ف (ج) = \dots\dots\dots (۵)$$

میں ج کو ساقط کرنے سے لفاف کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

دفعہ ۱۳۹ دیکھو۔  
 مذکورہ بالا حل کو دریافت کرنیکا عام طریقہ یہ ہے کہ مساوات (۱)  
 کو بلحاظ لا کے تفرق کیا جائے۔

[\*: مساوات معادل ہے بہا = ف - (بہ/ع) یا فہ (عہا، بہا) = ۰ کے]

پس  $ع = \frac{فرع}{فرلا} = ع + [لا + فَا (ع)] \frac{فرع}{فرلا}$

اس لئے  $[لا + فَا (ع)] \frac{فرع}{فرلا} = ۰ \dots \dots \dots (۶)$

اس لئے ضروری ہے کہ  $\frac{فرع}{فرلا} = ۰ \dots \dots \dots (۷)$

یا  $لا + فَا (ع) = ۰ \dots \dots \dots (۸)$

(۷) سے حاصل ہوتا ہے کہ  $ع = ج$  اور اس لئے  $ما = ج + لا + فَا (ج) \dots (۹)$

دوسرے نتیجہ (۸) اور (۱) میں سے  $ع$  کو ساقط کرنے سے  $لا$  اور  $ما$

میں ایک خاص ربط حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ (۱) اور (۸) میں سے  $ع$

کا حاصل اسقاط وہی ہے جو (۴) اور (۵) میں سے  $ج$  کا ہے اسلئے

دوسرا حل مذکورہ بالا لفاف ہو گا۔

حل (۹) جس میں ایک اختیاری مستقل  $ج$  ہے مکمل ابتدائی

کہلاتا ہے۔ دوسرا حل یعنی لفافی حل مکمل ابتدائی میں شامل نہیں ہے

یعنی  $ج$  کو کوئی خاص قیمت دینے سے یہ حاصل نہیں ہو سکتا اس لئے

اس کو نادر حل کہتے ہیں۔

مثال :- ایسے منحنی دریافت کرو جن کا پائیں منحنی لمحاذا نقطہ (۱، ۰) کے جس کو

تطلب مانا جائے لا۔ ی۔ ہو۔

اس خاصیت کا اظہار  $ع = ج$  ہے۔ جہاں  $ب$ ، محور ما پر مقطوع ہے۔

اس لئے  $ما = لا + ع + \frac{۱}{ع} \dots \dots \dots (۱۰)$

[\* ایک سے اعلیٰ درجہ کی تفرقی مساوات کے نادر حل کا عام نظریہ

تفرقی مساوات کی خاص کتابوں میں مل سکتا ہے۔

لفاف کے نظریہ سے اسکو خاص تعلق ہے اگرچہ یہ استقدر وسیع نہیں ہے]

اور اسکا حل خطوط کا قبیل

$$(۱۱) \dots\dots\dots \frac{1}{ج} + ج لا = ما$$

ہے۔ نیز لغاف  $ما^۲ = ۱۴ لا$  (۱۲)۔  
 بھی تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے۔ دفعہ ۱۴۰ مثال (۱۲) دیکھو۔

## امثلہ ۵۰ (تفرقی مساوات کی تکنیک)

$$(۱) \text{ اگر } ما = (لا + ب) \text{ تو ثابت کرو کہ } لا \frac{فر ما}{فر لا} - \frac{فر ما}{فر لا} = .$$

$$(۲) \text{ اگر } ما = (لا + ب) \text{ تو ثابت کرو کہ } لا \frac{فر ما}{فر لا} - \frac{۲ فر ما}{لا فر لا} + \frac{ما^۲}{لا} = .$$

$$(۳) \text{ اگر } ما = (فو + ب) \text{ تو ثابت کرو کہ } \frac{فر ما}{فر لا} - \frac{ما^۲}{لا} = .$$

$$(۴) \text{ اگر } ما = (فو + ب) \text{ تو ثابت کرو کہ } لا \frac{فر ما}{فر لا} - \frac{ما^۲}{لا} = .$$

$$\frac{فر ما}{فر لا} - (ع + ب) \frac{فر ما}{فر لا} + ع ب ما = .$$

$$(۵) \text{ اگر } ما = (لا + ب) \text{ تو ثابت کرو کہ } لا \frac{فر ما}{فر لا} - \frac{ما^۲}{لا} - \frac{بک فر ما}{فر لا} + بک ما = .$$

$$(۶) \text{ اگر } لا = فو - \frac{۱}{ک} \text{ (جہن ت + ب جب ن ت) تو ثابت کرو کہ } لا = .$$

$$\frac{فر لا}{فر ت} + بک \frac{فر لا}{فر ت} + (ن + \frac{۱}{پ} بک) لا = .$$

$$(۷) \quad \text{اگر ف} = \frac{۱}{ر} + \text{ب} \text{ ثوابت کرد که } \frac{فر}{ر} + \frac{۲}{ر} \frac{فر}{ر} = \text{فر}$$

$$(۸) \quad \text{اگر ق} = \text{ا} \text{ و ک} + \text{ب} \text{ ثوابت کرد که } \frac{فر}{ر} + \frac{۱}{ر} \frac{فر}{ر} = \text{فرق}$$

$$(۹) \quad \text{اگر ف} = \frac{\text{ا} \text{ و ب} \text{ ثوابت کرد که}}{ر}$$

$$(۱۰) \quad \text{اگر ف} = \frac{\text{ا} \text{ جم ک} + \text{ب} \text{ جب ک} \text{ ثوابت کرد که}}{ر} = \frac{فر}{ر} + \frac{۲}{ر} \frac{فر}{ر} - \text{ک} \text{ ف} = \text{فر}$$

$$\frac{فر}{ر} + \frac{۲}{ر} \frac{فر}{ر} + \text{ک} \text{ ف} = \text{فر}$$

$$(۱۱) \quad \text{اگر م} = (\text{ا} + \text{ب} \text{ لا}) \text{ جم ک} \text{ لا} + (\text{ج} + \text{د} \text{ لا}) \text{ جب ک} \text{ لا}$$

$$\text{ثوابت کرد که } \frac{فر}{ر} + \frac{۲}{ر} \frac{فر}{ر} + \text{ک} \text{ م} = \text{فر}$$

$$(۱۲) \quad \text{اگر م} = (\text{ا} \text{ جم ک} \text{ لا} + \text{ب} \text{ جن ک} \text{ لا} + \text{ج} \text{ جم ک} \text{ لا} + \text{د} \text{ بب ک} \text{ لا})$$

$$\text{ثوابت کرد که } \frac{فر}{ر} = \text{ک} \text{ م}$$

$$(۱۳) \quad \text{اگر م} = (\text{ا} \text{ جن ک} \text{ لا} + \text{ب} \text{ جن ک} \text{ لا}) \text{ جم ک} \text{ لا}$$

$$+ (\text{ج} \text{ جن ک} \text{ لا} + \text{د} \text{ جن ک} \text{ لا}) \text{ جب ک} \text{ لا}$$

$$\text{ثوابت کرد که } \frac{فر}{ر} + \text{ک} \text{ م} = \text{فر}$$

$$(۱۴) \quad \text{اگر م} = (\text{ا} \text{ جب ک} \text{ لا} + \text{ب} \text{ ثوابت کرد که})$$

$$= \frac{f_2}{f_1} - \frac{f_1}{f_2} \quad (1-2)$$

(۱۵) اگر ما = (جِبۃُ الاِ) + (جِبۃُ الاِ) + ب تو ثابت کرو کہ

$$r = \frac{r_1}{r_2} y - \frac{r_1'}{r_2'} (y-1)$$

(۱۶) اگر ما = (اجم) (لوگ لا) + (ب جب) (لوگ لا) (تو ثابت کر کے)

$$= \frac{f_1}{f_2} + \frac{f_2}{f_1} + \frac{f_3}{f_4} + \frac{f_4}{f_3} + \dots$$

(۱۷) اگر  $\delta = \left\{ \begin{matrix} \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1} \\ \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1} \end{matrix} \right\} + \text{حج} \left\{ \begin{matrix} \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1} \\ \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1} \end{matrix} \right\}$

تو ثابت کرو کہ  $(1 - \frac{r}{n})^n = \frac{1}{e}$   $\frac{1}{e} = \frac{1}{2.718}$

(۱۸) ثابت کرو کہ ابتدائی ما = م + لا + م سے جہاں م اختیاری ہے

تفرقی مساوات  $\Rightarrow \left(\frac{z}{n}\right)^2 - \frac{z}{n} + 1 = 0$  حاصل ہوتی ہے۔

(۱۹) اگر  $۲ج + ۶ا = ۱۸$  جہاں ج اختیار ہے تو ثابت کرو کہ

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{r_1}{r_2} - \frac{r_2}{r_1} \right) \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

(۲۰) ثابت کرو کہ ان مکانیوں کی تفرقی مسادات جنگی محاور یا محو کے

متوازی ہیں  $\frac{\text{فرق ۲وا}}{\text{فرق ۱وا}} = \frac{۱}{۲}$  ہے۔

(۲۱) ثابت کرو کہ ان تمام مکافیوں کی تفرقی مساوات جبکہ محاورہ تشاکل محو لا ینطبق ہوتے ہیں

$$\frac{ما^۲}{فرلا} + \left( \frac{فرما}{فرلا} \right) = ۰ \text{ ہے}$$

(۲۲) ثابت کرو کہ ان تمام مخروطیوں کی تفرقی مساوات جن کے صدی محور محدودوں کے محوروں پر منطبق ہوتے ہیں

$$\frac{لا^۲}{فرلا} + \frac{فرما}{فرلا} - \left( \frac{فرما}{فرلا} \right) - \frac{ما^۲}{فرلا} = ۰ \text{ ہے}$$

(۲۳) محور لا کو مبدأ پر سس کرنے والے تمام دائروں کی تفرقی مساوات

$$\frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا^۲}{لا^۲ - ما^۲}$$

(۲۴) ثابت کرو کہ ان تمام مخروطیوں کی تفرقی مساوات جو متحدہ ما کو مبدأ پر مس کرتے ہیں اور جن کے مرکز محور لا پر ہیں

$$\frac{لا^۲}{فرلا} + \frac{فرما}{فرلا} - \left( \frac{فرما}{فرلا} - ما^۲ \right) = ۰ \text{ ہے}$$

$$\text{اگر } ما = \frac{لا^۲ + لا^۲}{لا + ب} \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

(۲۶) ثابت کرو کہ ان تمام زائیدوں کی تفرقی مساوات جو مبدأ میں سے گزرتے ہیں اور جن کے متقارب محدودوں کے محوروں کے متوازی ہیں

$$\frac{لا^۲}{فرلا} - \frac{فرما}{فرلا} - \left( \frac{فرما}{فرلا} \right) + \frac{ما^۲}{فرلا} = ۰ \text{ ہے}$$

(۲۷) ثابت کرو کہ مساوات  $\frac{فرما}{فرت} + ن^۲ ما = ف(ت)$  کو ربط

$$= \frac{۱}{ن} \text{ جب } ن \text{ ف(ت) جب } ن \text{ فرت} \\ - \frac{۱}{ن} \text{ جب } ن \text{ ف(ت) جب } ن \text{ فرت}$$



پورا کرتا ہے اور یہی اس کا مکمل مل ہے۔

## امثلہ ۵۱

(رتبہ اول کی تفرقی مساواتیں)

$$(۱) \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}} \text{ کو تکمل کرو} \quad [\text{ما} = \text{ج لا}]$$

$$(۲) \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما}}{\text{لا} - ۱} \text{ کو تکمل کرو} \quad [\text{ما} = \text{ج لا} - ۱]$$

$$(۳) \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{مما}}{\text{لا}} \text{ کو تکمل کرو} \quad [\text{جب لا جم ما} = \text{ج}]$$

$$(۴) \quad \frac{\text{لا}^۲ \text{ فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = ۱ \text{ کو تکمل کرو} \quad [\text{ما} = ۱ + \text{ج فو}]$$

$$(۵) \quad \text{م (ما + ب) فرلا + ن (لا + ۱) فرما} = ۱ \text{ کو تکمل کرو} \quad [\text{م (لا + ۱) (ما + ب) = ج}]$$

$$(۶) \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما} + ۱}{\text{لا} + ۱} \text{ کو تکمل کرو} \quad [\text{ما} = \frac{\text{ج} + \text{لا}}{\text{ج لا} - ۱}]$$

$$(۷) \quad (۱ + \text{ما}^۲) \text{ فرلا} - \text{لا ما} (۱ + \text{لا}^۲) \text{ فرما} = ۱ \text{ کو تکمل کرو}$$

$$[\text{م (لا}^۲ + ۱) (\text{ما}^۲ + ۱) = \text{ج لا}^۲]$$

$$(۸) \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما} (۱ - \text{ما}^۲)}{\text{لا} (۱ - \text{لا}^۲)} \text{ کو تکمل کرو} \quad [\text{ما} (۱ - \text{لا}^۲) = \text{ج لا} (۱ - \text{ما}^۲)]$$

$$(۹) \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{م (ما} + ۱) (لا + ۱)}{\text{م (لا} + ۱) (ما + ۱)} \text{ کو تکمل کرو}$$

$$(۱۰) \quad (لا + \text{ما}^۲) \text{ فرلا} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} (ما + ۱) \text{ لا} \text{ کو تکمل کرو}$$

(۱۱) ایسے منحنی دریافت کرو جن میں حماس اور سمتی نیم قطر کے درمیان کا زاویہ سمتی زاویہ طہ کا نصف ہو۔

(۱۲) ایسے منحنی دریافت کرو جن میں میدا سے حماس پر کا عمود نقطہ تماس کے فصل کے مساوی ہو۔

(۱۳) ایسے منحنی دریافت کرو جن کے حماس کا وہ حصہ جو محدود کے محوروں کے درمیان کٹتا ہے نقطہ تماس پر تنصیف ہو جائے۔

(۱۴) ایسے منحنی دریافت کرو جن میں زیر حماس فصل کے متناسب ہے۔

(۱۵) ثابت کرو کہ اگر کسی منحنی میں زیر عماد کو فصل سے مستقل نسبت ہو تو یہ منحنی ایک مخروطی تراش ہوگی۔

(۱۶) ایسے منحنی دریافت کرو جن میں معین کے قدم سے اگر حماس پر عمود کھینچا

(۱۷) جائے تو اس کا طول مستقل (۱) ہو۔ [زنجیر، ما = ۱، جہن = ۱] ایسے منحنی دریافت کرو جن کا قطبی زیر حماس مستقل (۱) ہے۔

[ $r = \frac{1}{\text{طہ} - \text{عہ}}$ ]

(۱۸) وہ منحنی دریافت کرو جن میں قطبی زیر عماد مستقل ہو [۱ = ۱، (طہ - عہ)]

(۱۹) وہ منحنی دریافت کرو جن کے کسی دو معینوں کا درمیانی رقبہ، منقطعہ قوس کے متناسب ہو۔

[زنجیر، ما = ۱، جہن = ۱، عہ = ۱]

(۲۰) ایسے منحنی دریافت کرو جن کے کسی معین ما محور (۱) اور منحنی سے گھرا ہوا رقبہ، معین اور متناظر فصل کے حاصل ضرب کا (۱) حصہ ہو۔

[ $\text{ما} = \text{ج} - ۱$ ]

(۲۱) ایسے گردشیں مجسم کی شکل دریافت کرو جس کے کسی عمودی نقطہ سے کا حجم تراش کے رقبہ اور محور کے طول کے حاصل ضرب کا نواں حصہ ہے۔

[ کون ننھی کی مساوات  $Ma^2 = \frac{1}{2} \pi r^2$  ہے ]

(۲۲) ایک یکساں طاقت والی لگی ہوئی سلاخ میں عمودی تراش کا رقبہ

(مس) اس میں کے کل ازور کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ اگر لا انتصایا پیچے کی طرف ناپا جائے تو مس اور لا میں رشتہ ذیل کی شکل کا ہے

$$Ms = \frac{1}{2} \pi r^2 \text{ - ج } \frac{1}{2} \pi r^2 \text{ فرلا}$$

پس ثابت کرو کہ سلاخ کی شکل اس گردشیں مجسم کی سی ہوگی جو

$$Ma = \frac{1}{2} \pi r^2 \text{ کے ننھی کو محور لا کے گرد گھمانے سے حاصل}$$

ہوتی ہے۔

(۲۳) ایسے ننھی کی شکل دریافت کرو جو بلحاظ محور لا کے متشاکل ہے اور جس میں کسی دگنے معین سے کئے ہوئے رقبہ کا اوسط مرکز معین سے محور کے

$$\text{طول کے } \frac{1}{2} \pi r^2 \text{ فاصلے پر ہو۔ [ } Ma = \frac{1}{2} \pi r^2 \text{ ج لا } ]$$

سوالات ۲۴ تا ۳۲ کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو

$$(۲۴) (La^2 + 3LaMa^2) \text{ فرلا} + (Ma^2 + 3LaMa^2) \text{ فرما} =$$

$$(۲۵) La \text{ فرلا} + Ma \text{ فرما} = \frac{La^2 + 3LaMa^2}{La^2 + Ma^2}$$

$$[ La + Ma^2 = \frac{La^2 + 3LaMa^2}{La^2 + Ma^2} ]$$

$$(۲۶) La \text{ فرما} - \frac{La^2}{La^2 + Ma^2} = Ma \text{ [ } Ma = \frac{La^2 + 3LaMa^2}{La^2 + Ma^2} \text{ ]}$$

$$(۲۷) La \text{ فرما} - \frac{La^2}{La^2 + Ma^2} = Ma$$

تفرقی مساوات اور اس کے ابتدائی کی ہندسی تعبیر بیان کرو۔

$$[ لا^۲ = ج^۲ + ما^۲ ]$$

$$[ لا^۲ - ما^۲ = ج^۲ ] \quad \frac{فرما}{لا^۲ - ما^۲} = \frac{فرما}{ج^۲} \quad (۲۸)$$

$$[ لا^۲ - ما^۲ = ج^۲ ] \quad \frac{لا^۲ - فرما}{لا^۲ - ما^۲} = \frac{لا^۲ - فرما}{ج^۲} \quad (۲۹)$$

$$[ لا^۲ - ما^۲ = ج^۲ ] \quad \frac{لا^۲ - فرما}{لا^۲ - ما^۲} = \frac{لا^۲ - فرما}{ج^۲} \quad (۳۰)$$

$$[ لا^۲ - ما^۲ = ج^۲ ] \quad \frac{فرما}{لا^۲ - ما^۲} = \frac{فرما}{ج^۲} \quad (۳۱)$$

$$[ لا^۲ - ما^۲ = ج^۲ ] \quad \frac{لا^۲ - ما^۲}{لا^۲ - ما^۲} = \frac{لا^۲ - ما^۲}{لا^۲ - ما^۲} \quad (۳۲)$$

$$[ لا^۲ - ما^۲ = ج^۲ ] \quad \frac{لا^۲ - ما^۲}{لا^۲ - ما^۲} = \frac{لا^۲ - ما^۲}{لا^۲ - ما^۲} \quad (۳۳)$$

ثابت کرو کہ مساوات  $لا^۲ - ما^۲ = ج^۲$  کے ابدال سے متجانس بنائی جاسکتی ہے۔

$$[ لا^۲ - ما^۲ = ج^۲ ] \quad \frac{لا^۲ - ما^۲}{لا^۲ - ما^۲} = \frac{لا^۲ - ما^۲}{لا^۲ - ما^۲} \quad (۳۴)$$

ثابت کرو کہ  $لا^۲ - ما^۲ = ج^۲$  کے ابدال سے حل کیا جاسکتا ہے۔

$$[ لا^۲ - ما^۲ = ج^۲ ] \quad \frac{لا^۲ - ما^۲}{لا^۲ - ما^۲} = \frac{لا^۲ - ما^۲}{لا^۲ - ما^۲} \quad (۳۵)$$

امثلہ ۵۲

(خطی مساوات)

سوالات آتا کی تشریح مساواتوں کو حل کرو۔

(۱)  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ماس لا} = \text{قط لا}$  [ما = جب لا + ج جم لا]

(۲)  $(\text{لا} - \text{لا}^۲) \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{لا ما} = \text{لا لا}$  [ما = لا + ج، [۱ - لا<sup>۲</sup>]]

(۳)  $\text{لا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{لا} + \text{ما} = -$  [لا<sup>۲</sup> + لا ما = ج]

(۴)  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{ما}}{\text{لا}} = ۱$  [لا<sup>۲</sup> - لا ما = ج]

(۵)  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۲ \text{لا ما} = ۱ + ۲ \text{لا}^۲$  [ما = لا + ج قو<sup>۲</sup>]

(۶)  $\text{لا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{لا} - ۱}{۱ + \text{لا}^۲} \text{ما} = ۱$

(۷)  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرط}} + ۱۶ \text{مس طما} = \text{مس طما}$  [۱۶ = ۱ + ج جم طما]

(۸)  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ماس لا} - ۲ \text{جب لا}$  [ما = جم لا + ج قط لا]

(۹)  $(\text{لا} - ۱ - \text{لا}^۲) \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + (\text{لا}^۲ - ۱) \text{ما} = \text{لا}^۳$

[ما = لا + ج لا، [۱ - لا<sup>۲</sup>]]

(۱۰) ثابت کرو کہ مساوات  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ف ما} = \text{ق ما}$

بدال ما<sup>(ن-۱)</sup> = می سے خطی بنائی جاسکتی ہے

[پرنولی کی مساوات]

(۱۱) حل کرو  $\frac{لا فرما}{فرلا} + ما = ما لوک لا$   $[\frac{۱}{ما} = ۱ + لوک لا + ج لا]$

(۱۲) حل کرو جم لا  $\frac{فرما}{فرلا} - ما جب لا + ما =$   $[\frac{۱}{ما} = جب لا + ج جم لا]$

(۱۳) اگر گناش (گ) والے کھنڈکی دونوں تختیوں کو ایسے تار سے ملا دیا جائے جسکی فرجحت (نر) ہے اور ذاتی اماں کی شرح صفر ہے تو برقی یار (جکم) اور قوت محرکہ برق (ق) میں ذیل کار اشتہ ہے۔

ق = نر  $\frac{فرجکما}{فرت} + \frac{جکما}{جک}$   
 اس مساوات کو بحمل کر دیکھ ق = ۰، ق = مستقل،  
 ق = ق جم (پ ت + ص)

## امثلہ ۵۳

### علی القوائم خطوط رمی

(۱) خطوط ما = ج لا کے علی القوائم خطوط رمی دریافت کرو۔

[دائرے لا + ما = ج]

(۲) منحنیات ۱-۱ ما = لا کے علی القوائم خطوط رمی دریافت کرو

[منحوظات لا + ن ما = ج]

(۳) دائروں لا + ما = ۲ ج ما کے علی القوائم خطوط رمی دریافت کرو۔

[دائرے لا + ما = ۲ ج لا]

(۴) کچھ منحنیات کے لئے  $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{ما + ۳ لا + ما}{لا + ۳ لا + ما}$  نیز ان کے علی القوائم

خطوط رمی دریافت کرو۔

[ $(لا - ما) = ج لا$ ]  $[لا + ۱ لا + ما + ما = ج]$

(۵) ثابت کرو کہ ہم ماسکہ مکافیوں  $ما^۲ = ۴ (لا + لا)$  کی تفرقی مساوات ہے

$$ما^۲ + ۲ لا ع - ما^۲ = ۰ \text{ جہاں } ع = \frac{فرما}{فرلا}$$

ثابت کرو کہ علی القوائم خطوط رمی کی تفرقی مساوات بھی یہی ہے۔ اور  
اس نتیجہ کی ہندسی تعبیر بناؤ۔

(۶) ثابت کرو کہ ہم ماسکہ مخروطیوں  $لا^۲ + \frac{ما^۲}{۲ لا + لا} = \frac{ما^۲}{۲ لا + لا}$  کی تفرقی مساوات

$$لا (ما^۲ + ۲ لا ع - لا^۲) = ۰ \text{ جہاں } ع = \frac{فرما}{فرلا} \text{ ہے۔}$$

ثابت کرو کہ علی القوائم خطوط رمی کی تفرقی مساوات بھی یہی ہے۔ اور نتیجہ  
کی ہندسی تعبیر بیان کرو۔

(۷) قائم زائد قطعات کا ایک نظام ثابت نقطوں  $(۰، ۱)$  میں سے  
گزرتا ہے اور ان کا مرکز مبدأ ہے۔ ثابت کرو کہ ان کے علی القوائم  
خطوط فی کسینی کے بیضوی ہیں

$$(لا^۲ + ما^۲) = ۲ (لا^۲ - ما^۲) + ج$$

(۸) ثابت کرو کہ کافی  $ما^۲ = ۴ لا$  کے درجوں کی تفرقی مساوات ہے

$$لا + ما^۲ فرلا + لا (فرما فرلا) = ۰$$

(۹) ثابت کرو کہ دائرہ  $لا + ما^۲ = ۴$  کے درجہ کی تفرقی مساوات ہے

$$لا^۲ - لا + ۲ لا ما فرلا + (ما^۲ - لا^۲) (فرما فرلا) = ۰$$

(۱۰) خطوط صنوبری  $ر = ۱ - (ا - جم طہ)$  کے علی القوائم خطوط رمی دریافت کرو  
[صنوبری  $ر = ب (ا + جم طہ)$ ]

(۱۱) ثابت کرو کہ نغمیات  $ر = ۱ - (ا - جم طہ)$  کے علی القوائم خطوط رمی  
 $ر = ب (ا + جم طہ)$  ہیں۔

خاص صورتوں  $۱ = ۱ - ۱، ۲ = ۲ - ۲، ۳ = ۳ - ۳$  میں نتیجہ کی ہندسی

تعبیر بتاؤ۔

$$(۱۲) \text{ ثابت کرو کہ منحنیات } ر' = ر \text{ جم } طہ \text{ کے علی القوائم خطوط رمی} \\ = ر \text{ جب } طہ \text{ ہیں۔}$$

$$(۱۳) \text{ اگر دو قطبی محدودوں میں (دفعہ ۱۳۲) منحنیات کے قبیل کی مساوات} \\ \text{ف (ر' ر) = ج ہو تو ثابت کرو کہ علی القوائم خطوط رمی کی تفرقی مساوات} \\ \text{ر جف ف فرطہ = ر جف ف فرطہ ہوگی۔}$$

$$\text{پس دکھاؤ کہ دائرے } ر = ر' \text{ ج کے علی القوائم خطوط رمی دوسرے} \\ \text{دائرے طہ + طہ = ج ہیں۔}$$

$$(۱۴) \text{ ثابت کرو کہ کیسینی کے بیضوی (ر' ر = ج کے علی القوائم خطوط} \\ \text{رمی قائم زائد طہ۔ طہ = ج ہیں۔}$$

$$(۱۵) \text{ ثابت کرو کہ ہم قوہ منحنیات } ر - \frac{1}{ر} = ج \text{ کے علی القوائم} \\ \text{خطوط رمی متناطیسی منحنیات جم طہ + جم طہ = ج ہیں۔}$$

## امثلہ ۵۴

(۱) اعلیٰ درجہ کی تفرقی مساواتیں

سوالات اتنا۔ ۱۰ کی تفسیقی مساواتوں کو حل کرو۔

$$(۱) \left( \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right)^2 - (\text{عہ} + \text{بہ}) \left( \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right) + \text{عہ بہ} = ۰$$

$$[ \text{ما} = \text{عہ لا ج} + \text{ما} = \text{بہ لا ج} ]$$

$$(۲) \left( \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right)^2 = \text{جب}^2 \text{ لا} \quad [ \text{ما} = \text{ج} \pm \text{جم لا} ]$$



- (۳)  $\left( \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right)^2 = ۲ \text{ ما}^۲$  [  $\text{ما} = \text{ج} \pm \text{قو}^۲$  ]
- (۴)  $\text{ما}^۲ \left( \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right)^2 = ۲ \text{ لا}^۲$  [  $\text{ما} = \text{ج} \pm ۲ \text{ لا}^۲$  ]
- (۵)  $\text{لا} \left( \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right)^2 = ۱$  [  $\text{ما} = \text{ج} \pm ۲ \text{ لا}^۲$  ]
- (۶)  $(۱ - \text{لا}^۲) \left( \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right)^2 = ۱$  [  $\text{ما} = \text{ج} \pm \text{جب}^۲ \text{ لا}^۲$  ]
- (۷)  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \left( \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} \right) = \text{لا} (\text{لا} + \text{ما})$
- [  $\text{ما} = \frac{۱}{۲} \text{ لا}^۲ + \text{ج}^۲ \text{ ما} = ۱ - \text{لا} + \text{ج} \pm \text{قو}^۲$  ]
- (۸)  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \left( \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{لا} \right) = \text{ما} (\text{لا} + \text{ما})$
- [  $\text{ما} = \text{ج} \pm \text{قو}^۲ \text{ ما} = ۱ - \text{لا} + \text{ج} \pm \text{قو}^۲$  ]
- (۹)  $\text{لا} \left( \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right)^2 - ۲ \text{ ما} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{لا} = ۰$  [  $\text{لا}^۲ = ۲ \text{ ج}^۲ \text{ ما} + \text{ج}^۲$  ]
- (۱۰)  $\text{ما} \left( \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right)^2 + ۲ \text{ لا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما} = ۰$  [  $\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲ = \text{ج}^۲ \pm \text{لا}^۲$  ]
- (۱۱) ایسے منحنی دریافت کرو کہ محدودوں کے محوروں کے ماس کے تقطوعوں کے  
ما قتل ضرب مستقل ک کے مساوی ہو۔ [ زائد ۴ لا ما = ک ]
- (۱۲) ایسے منحنی دریافت کرو کہ مبداء سے کسی ماس پر عمودوں کے مساوی  
ہو۔ [ دائرے لا + ما = ۲ لا ]
- (۱۳) حل کرو ما = لا ع + [ جب + لا ع ] [ نادرل  $\frac{۲}{لا} + \frac{۲}{ب} = ۱$  ]
- (۱۴) ایسے منحنی دریافت کرو کہ نقطوں (ج، -) سے کسی ماس پر عمودوں کے

حاصل ضرب ب<sup>۲</sup> کے مساوی ہو۔ [مخروطات لا<sup>۲</sup> ب<sup>۲</sup> ج + ما<sup>۲</sup> ب<sup>۲</sup> = ا<sup>۲</sup>]

$$[ا = \frac{لا^۲}{ب^۲} - \frac{ما^۲}{ب^۲}]$$

(۱۵) ایسے منحنی دریافت کرو کہ نقاط (± ۱، ۰) کے معینوں پر تماس جو حصے کاٹتا ہے ان کا حاصل ضرب ب<sup>۲</sup> کے مساوی ہو۔

$$[مخروطیاں لا^۲ \pm \frac{ما^۲}{ب^۲} = ا]$$

(۱۶) حل کرو ما = لا + ع (۱ - ع)

$$[نادر حل (لا + ا) = ۲ = ا]$$

(۱۷) حل کرو (لا - ا) ع + (لا - ما) ع - ما = ۰

$$[نادر حل (لا + ما) = ۲ = ا]$$

(۱۸) ایسے منحنی دریافت کرو کہ محدودوں کے محوروں پر تماس کے مقطعوں کا

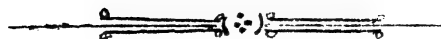
حاصل جمع ۱ کے مساوی ہو۔ [مکافی (لا - ما) - ۲ (لا + ما) + ا = ۰]

(۱۹) ثابت کرو کہ لا + ما = ف (ف = ف (ف/لا) کی قسم کی تفرقی مساوات

متوازی منحنیات کے ایک نظام کو ظاہر کرتی ہے۔

(۲۰) ثابت کرو کہ ف (لا، ما، ع) = (۱/ع - ع) کی قسم کی تفرقی مساوات

قائم منحنیات کے دو نظاموں کو ظاہر کرتی ہے۔



# بارہواں باب

## دوسرے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

۱۶۲۔ نمونہ  $\frac{فرما}{فرلا} = ف (لا) کی مساواتیں -$

یہ باب زیادہ تر دوسرے رتبہ کی تفرقی مساواتوں کے لئے مخصوص ہے اور اس میں خصوصاً ایسے نمونہ کی مساواتوں پر غور کیا جائے گا جو احصاء کے ہندسی اور طبیعی اطلاقات میں عموماً کام آتی ہیں۔ بعض صورتوں میں اعلیٰ رتبہ کی مساواتوں کے لئے ان طریقوں کی توسیع ہو سکتی ہے۔ پہلے ہم چند خاص صورتوں پر غور کریں گے اور پھر دوسرے رتبہ کی عام خطی مساوات پر۔ مستقل سروں والی ن۔ دیں رتبہ کی عام خطی مساوات پر اگلے باب میں بحث کی جائے گی۔

سب سے پہلے صورت  $\frac{فرما}{فرلا} = ف (لا) \dots (۱) پر غور کرو۔$   
اسکو حل کرنے کے لئے بلحاظ لا کے صرف دو سادہ تنکملوں کی ضرورت ہے۔

یعنی  $\frac{فرما}{فرلا} = ف (لا) فرلا + ا$

اور  $ا = ف (لا) فرلا + (لا + جب) \dots (۲)$

جہاں ا اور جب اختیاری مستقل ہیں۔

مثال (۱)۔ حرکیاتی مساوات  $\frac{فرلا}{فرت} = ف(ت) \dots\dots\dots (۳)$

ایک ذرہ کی ایسی خطی حرکت کو بیان کرتی ہے جس میں قوت، وقت کا معلوم تفاعل ہے۔ یہ مساوات مذکورہ بالا صورت کی ہے صرف ترکیب میں ذرا سا فرق ہے۔ مستقل اسراع (ج) والے ذرہ کی صورت میں مساوات ہے

$$(۴) \dots\dots\dots ج = \frac{فرلا}{فرت}$$

اس لئے  $\frac{فرلا}{فرت} = ج ت + ا$

اور لا =  $\frac{۱}{۲} ج ت^۲ + ا ت + ب \dots\dots\dots (۵)$

تیزاگر  $\frac{فرلا}{فرت} = گ ج ب ن ت \dots\dots\dots (۶)$

یعنی قوت، وقت کا سادہ موسیقی تفاعل ہے تو

$$\frac{فرلا}{فرت} = - گ \frac{ج ب ن ت}{ن}$$

اور لا =  $گ \frac{ج ب ن ت}{ن} + ا ت + ب \dots\dots\dots (۷)$

اس سوال کے مستقالات ا اور ب (ب اس شرط سے مقرر کئے جاسکتے ہیں کہ کسی خاص آن پر ذرہ دے ہوئے مقام پر ہو اور اس کی رفتار کسی دی ہوئی مقدار کے مساوی ہو۔

مثال (۲)۔ مساوات ب  $\frac{فرلا}{فرت} = و(ل - لا) \dots\dots\dots (۸)$

کا ایسا حل دریافت کرو جو ذیل کی شرائط کو پورا کرے۔

$$لا = ۰، کے لئے \frac{فرلا}{فرت} = ما = ۰$$

در اصل یہ سوال ایک ایسی سلاح کے خم دریافت کرنے کا ہے جس کا ایک سر  $l = 0$  افقی وضع میں جکڑ دیا گیا ہے اور دوسرے سر سے  $l = L$  سے معلومہ وزن  $(W)$  لٹک رہا ہے۔

(۸) کو دومرتبہ متواتر تکمیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$b = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

اور جب  $n = 6$  تو  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = 2 + \frac{1}{20}$  ..... (9)

جہاں اور جہ اختیار ہیں۔

اور حدودی شرائط سے ماہل ہوتا ہے کہ (۱)۔ اور (۲)۔

اس لئے  $\frac{1}{r} = \frac{1}{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{r})} \dots \dots (10)$

۱۶۳۔  $\frac{فر٢ما}{فر١ما} = ف (ما)$  کے نمونہ کی مساواتیں۔

$$(1) \dots\dots\dots (2a) = \frac{r_a}{r_n} \frac{m_a}{m_n}$$

کے نمونہ کی مسادات کا پہلا تکملہ دو طریقوں سے حاصل ہو سکتا ہے۔

پہلے طریقہ میں دونوں جانب کو  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$  سے ضرب دیکر بلحاظ لا کے تکمیل کرنے سے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فر}} = \left( \frac{\text{فرما}}{\text{فر}} \right) = \text{ف (ما)}$$

یعنی  $\frac{1}{2} \left( \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right) = \int f(m) \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + 1$

$$= f(\text{فرما}) + \text{فرما} \dots (۲)$$

۴۱۳

دوسرے طریقہ میں فرما کے لئے علامت (ع) رکھو، چونکہ

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرما}} \times \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ع} \frac{\text{فرع}}{\text{فرما}} \dots (۳)$$

اس لئے (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ع} \frac{\text{فرع}}{\text{فرما}} = \text{ف (ما)} \dots (۴)$$

یہ تابع متغیر ع اور متبوع متغیر ما میں پہلے رتبہ کی تفرقی مساوات ہے۔  
(۴) کو لمبا ما کے تکمیل کرنے سے

$$\frac{۱}{\text{ع}} = \text{ف (ما)} + \text{ا} \dots (۵)$$

اور یہ (۲) کے معادل ہے۔  
حل مکمل کر نیکے لئے (۲) کو ذیل کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{۱}{\text{ع}} = \frac{\text{ف (ما)} + \text{ا}}{\text{فرلا}} \dots (۶)$$

یہاں متغیر الگ الگ ہیں (دفعہ ۱۵۴) لیکن نسب نما میں جذر کی موجودگی  
تکی وجہ سے، تفاعل ف (ما) کی آسان شکلوں کے لئے بھی اس کو تکمیل  
کرنا دشوار ہوتا ہے۔

اس مساوات کی ایک ضروری شکل وہ ہے جس میں ف (ما)،  
متغیر ما کا خطی تفاعل ہو، یہ مساوات اس شکل کی ہوگی

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ا} = \text{ب} \dots (۷)$$

تابع متغیر ما کی بجائے ا +  $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$  لکھ کر بعد میں ما کا آخری نشان  
نکال دینے سے مساوات (۷) آسان تر شکل

$$\text{فر}^2 \text{ما} + \text{لا} = \text{ما} \dots \dots \dots (۸)$$

میں تعمیل ہو جاتی ہے۔

$$\text{اس کا پہلا تکملہ ہے } \left( \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{لا}} \right) + \text{لا} = \text{ما} = \text{ج} \dots \dots \dots (۹)$$

اگر مثبت ہے تو لکھو  $\text{لا} = \text{م}$  اور  $\text{ج} = \text{م}^2 \text{عما}$  ..... (۱۰)  
اور یہ ظاہر ہے کہ اگر ہم صرف حقیقی مقداروں پر ہی توجہ محدود رکھیں  
توجہ لازماً مثبت ہوگا۔

$$\text{پس } \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{عما} - \text{ما}} = \pm \text{م فر}^2 \dots \dots \dots (۱۱)$$

$$\text{یعنی جم}^2 = \frac{\text{ما}}{\text{عما}} = \pm (\text{م لا} + \text{صہ})$$

۴:۴

یہ مساوات (۸) کا مکمل حل ہے اور اس میں دو اختیاری مستقل عما اور صہ ہیں۔

اگر  $\text{جم}^2 = \text{صہ}$  اور  $\text{عما جب صہ} = \text{جب}$  ..... (۱۲)  
رکھیں تو حل کی معادل شکل

$\text{ما} = (\text{جم}^2 \text{م لا} + \text{جب جب م لا})$  ..... (۱۳)  
حاصل ہوتی ہے۔ یہ نتیجہ بہت اہم ہیں اور انہیں یاد رکھنا چاہیے۔  
ا کے منفی ہونے کی صورت میں فرض کرو کہ  $\text{لا} = -\text{م}^2$  اور اس طرح  
عمل کرنے پر مکمل حل حاصل ہوگا

$$\text{ما} = (\text{جم}^2 \text{م لا} + \text{جب جب م لا}) \dots \dots \dots (۱۵)$$

جہاں  $\text{م} = \sqrt{-1}$

اس صورت کے حل کرنے کا زیادہ آسان طریقہ آگے دیا جائیگا۔  
نمونہ (۱) کی مساوات حرکیات میں بہت عام ہے مثلاً ایک ذرہ کی

خطی حرکت کی مساوات جس پر ایک ایسی قوت عمل کر رہی ہے جو ذرہ کے مقام کے معلومہ تفاعل کے متناسب ہے ذیل کی شکل کی ہے

$$\text{فرت}^2 = \text{ف (لا)} \dots \dots \dots (۱۶)$$

اور یہ (۱) کے مطابق ہے اگر مختلف ترقیم کا لحاظ رکھا جائے۔

تکمل کے پہلے طریقے میں طرفین کو  $\frac{\text{فرت}}{\text{فرت}}$  سے ضرب دیا جاتا ہے

$$\text{یعنی } \frac{\text{فرت}}{\text{فرت}} \times \frac{\text{فرت}^2}{\text{فرت}} = \text{ف (لا)} \frac{\text{فرت}}{\text{فرت}}$$

اور بلحاظ ت کے تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\text{فرت}}{\text{فرت}} \right)^2 = \text{ف (لا)} \frac{\text{فرت}}{\text{فرت}} + \text{ج}$$

$$= \text{ف (لا) فرت} + \text{ج} \dots \dots \dots (۱۷)$$

جو ”توانائی کی مساوات“ کہلاتی ہے۔

دوسرے طریقے میں  $\frac{\text{فرت}}{\text{فرت}}$  کی بجائے (ع) لکھتے ہیں اور اس لئے

$$\frac{\text{فرت}^2}{\text{فرت}} \text{ کی بجائے } \frac{\text{فرت}^2}{\text{فرت}} \text{ (دفعہ ۳۲ دیکھو)}$$

$$\text{پس } \frac{\text{فرت}^2}{\text{فرت}} = \text{ف (لا)}$$

اور بلحاظ لا کے تکمل کرنے سے

$$\frac{1}{2} \text{فرت}^2 = \text{ف (لا) فرت} + \text{ج} \dots \dots \dots (۱۸)$$

اور یہ نتیجہ (۱۷) کے مطابق ہے۔

مثال (۱)۔ اگر ایک ذرہ پر مبادا کی جانب، فاصلہ کے متناسب قوت کش



عمل کر رہی ہے تو اسکی حرکت کی مساوات ہے

$$\text{فر}^1 \text{رت}^2 = \text{م} \text{لا} \dots \dots \dots (۱۹)$$

یہ مساوات خاص صورت (۸) کی ہے اور اس کا حل یہ ہے

$$\text{لا} = \text{ا} \text{جم} (\text{ا} \text{م} \text{ت} + \text{ص} \text{م}) \dots \dots \dots (۲۰)$$

یہ سادہ موسیقی حرکت کو ظاہر کرتی ہے۔ لا اور فر<sup>۱</sup>رت<sup>۲</sup> کی قیمتیں تکرار پاتی

ہیں جبکہ ا م ت کی قیمت میں ۲۲ کا اضافہ ہوتا ہے۔ اس لئے مدت

اہتزاز  $\frac{۲۲}{۷}$  ہے۔ اس مل کے اختیاری سستگلات لا اور صمہ بالترتیب

حیطہ اور آن کہلاتے ہیں۔

ایک درجہ کی آزادی والے کسی ”بقائی“ حرکیاتی نظام کی مساوات حرکت بھی جب نظام کو قائم توازن کی حالت سے ذرہ سا ہٹا دیا جاتا ہے (۱۹) کی صورت کی ہوتی ہے۔

مثلاً رقام کی تصحیح مساوات حرکت

$$\text{ل} \text{فر}^1 \text{ط}^2 = \text{ج} \text{جب} \text{ط}^3 \dots \dots \dots (۲۱)$$

ہے۔ جہاں ج اسراع بجا ذریعہ ارض ہے اور ل ایک خاص طول ہے جو رقام کی بنیاد پر منحصر ہے۔ سادہ رقام کی صورت میں ل دوری کا طول ہے۔ اگر حالت توازن سے انتہائی زاویہ ہٹاؤ ایک چھوٹا زاویہ ہو تو جب ط<sup>۳</sup> کی بجائے ط<sup>۲</sup> کہہ سکتے ہیں اور

$$\text{فر}^1 \text{ط}^2 = \text{ج} \text{ل} \text{ط}^3 \dots \dots \dots (۲۲)$$

اس مساوات کا حل ہے ط<sup>۳</sup> = عجم (ج ت + صم) ..... (۲۳)

اور اس لئے دور  $\pi^2 \sqrt{\frac{L}{g}}$  ہے۔

صحیح مساوات (۲۱) مذکورہ بالا طریقہ سے ایک مرتبہ تکمیل کی جاسکتی ہے جس سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2} L \left( \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} \right)^2 = \text{ج جم طہ} + \text{ا} \dots \dots (۲۴)$$

لیکن (سوائے خاص صورت  $\text{ا} = \text{ج}$ ) دوسرا تکمیل ناقصی تفاعلوں کی مدد کے بغیر دریافت نہیں ہو سکتا۔

مثال (۲) اگر ایک ذرہ سیدھے خط میں حرکت کر رہا ہو اور اس پر توجہ کش 'مبداء' سے فاصلہ کے مربع کی معکوس نسبت میں بدلتی ہو تو

$$\frac{\text{فر}^2}{\text{فرت}^2} = \frac{\text{مہ}}{\text{لا}} \dots \dots (۲۵)$$

اس لئے دفعہ ۵۴ کی مثال (۳) سے

$$\frac{1}{2} L \left( \frac{\text{فر}^2}{\text{فرت}^2} \right)^2 = \frac{\text{مہ}}{\text{لا}} + \text{ج} \dots \dots (۲۶)$$

اور اگر ذرہ فاصلہ 'ا' پر سکون سے حرکت شروع کرے تو

$$\text{ج} = \frac{\text{مہ}}{\text{لا}} \text{ اور } \frac{\text{فر}^2}{\text{فرت}^2} = \left[ \frac{\text{مہ}^2}{\text{لا}} \times \frac{\text{لا} - \text{ا}}{\text{لا}} \right] \dots \dots (۲۷)$$

منفی علامت لینے کی وجہ یہ ہے کہ رفتار مبداء کی طرف ہے۔ دوسرے تکمیل میں ابدال

$$\text{لا} = \text{ا} + \text{ج جم طہ} \dots \dots (۲۸)$$

سہولت دے۔ تغیر دن کو جدا کرنے پر

$$\text{ا} + \text{ج جم طہ} = \text{فرطہ} = \left( \frac{\text{مہ}^2}{\text{لا}} \right) \frac{1}{2} \text{ فرطہ} \dots \dots (۲۹)$$

$$\text{اس لئے طہ} + \frac{1}{2} \text{ جب طہ} = \left( \frac{\text{مہ}^2}{\text{لا}} \right) \frac{1}{2} \text{ ت} + \text{ج} \dots \dots (۳۰)$$

اور جیسے لا، ۱ سے صفر تک گھٹتا ہے ویسے طما، صفر سے  $\frac{2}{3}$  تک بڑھتا ہے۔ پس مقام سکون سے جو فاصلہ ۱ پر ہے مرکز کشش تک گرنے کا وقت (ت) ذیل کے جملہ سے حاصل ہوتا ہے

$$ت = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{2}{3}g}} \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{3}}} \quad (۳۱) \dots\dots\dots$$

۱۶۴۔ تفرقی مساواتیں جن میں صرف پہلے اور دوسرے رتبہ کے مشتق موجود ہوں

اگر مساوات ذیل کی صورت کی ہو

$$فما \left( \frac{فر\lambda}{فر\mu} \right) = \dots\dots\dots (۱)$$

جس میں متغیر لا اور ما صریحی طور پر شریک نہیں ہوتے تو  $\frac{فر\mu}{فر\lambda}$  کی بجائے (ع) کہنے سے حاصل ہوتا ہے

$$فما \left( \frac{فر\mu}{ع} \right) = \dots\dots\dots (۲)$$

اور یہ تابع متغیر (ع) میں پہلے رتبہ کی مساوات ہے۔

مساوات (۱) دفعہ ۱۶۳ کے مطابق  $\frac{فر\mu}{فر\lambda}$  کی بجائے ع  $\frac{فر\mu}{فر\lambda}$  کہنے سے بھی پہلے رتبہ کی مساوات میں تبدیل ہو سکتی ہے۔ اس میں ما متبوع متغیر ہو گا۔

$$اس طرح \quad فما \left( \frac{ع}{ع} \right) = \dots\dots\dots (۳)$$

مثال (۱)۔ ایسے منحنی دریافت کرو جن کا نصف قطر انحدار مستقل (۱) ہے۔

$$(۴) \dots\dots\dots \frac{1}{a} \pm = \frac{\frac{فرلا}{فرلا}}{\left\{ \frac{فرلا}{فرلا} + 1 \right\}}$$

$$(۵) \dots\dots\dots \frac{فرلا}{a} \pm = \frac{فرع}{\left\{ \frac{فرلا}{فرلا} + 1 \right\}} \quad \text{یا}$$

اس کو تکمیل کرنے سے (دفعہ ۷، نتیجہ ۱۳)

$$(۶) \dots\dots\dots \frac{ع - لا}{a} \pm = \frac{ع}{\left\{ \frac{ع}{ع} + 1 \right\}}$$

جہاں ع اختیار مستقل ہے

اس سے حاصل ہوتا ہے

$$(۷) \dots\dots\dots \frac{لا - ع}{\left\{ \frac{لا - ع}{لا - ع} + 1 \right\}} \pm = ع = \frac{فرلا}{فرلا}$$

$$(۸) \dots\dots\dots \frac{لا - ع}{\left\{ \frac{لا - ع}{لا - ع} + 1 \right\}} \pm = ع = \frac{فرلا}{فرلا}$$

جہاں ع آخری تکمیل کا اختیاری مستقل ہے۔

یہ نتیجہ ذیل کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۹) \dots\dots\dots \frac{لا - ع}{\left\{ \frac{لا - ع}{لا - ع} + 1 \right\}} \pm = ع = \frac{فرلا}{فرلا}$$

جو نصف قطر  $\frac{1}{2}$  والے دائروں کے قبیل کو ظاہر کرتا ہے۔ مذکورہ بالا اعلیٰ عام طریقہ کی مثال کے طور پر دیا گیا ہے اگرچہ اس سوال کا حل اور طریقوں سے زیادہ آسانی سے حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال (۲)۔ ذرہ کی خطی حرکت دریافت کرو جس پر ایسی قوت عمل کر رہی ہے جو رفتار کا ایک معلومہ تفاعل ہے۔

$$(۱۰) \dots\dots\dots \frac{فرلا}{فرلا} = ف \left( \frac{فرلا}{فرلا} \right) \dots\dots\dots$$

ظاہر ہے کہ یہ صورت (۱) کے تحت آتی ہے۔  $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$  کی بجائے (و)

لکھنے سے  $\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = \text{ف (و)}$

یا  $\frac{\text{فرو}}{\text{ف (و)}} = \text{فرت}$

اس لئے  $\frac{\text{فرو}}{\text{ف (و)}} = \text{ت + ج} \dots\dots\dots (۱۱)$

مثلاً اگر ذرہ پر کل فراحت رفتار کے متناسب ہے تو

$\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = \text{ک و} \dots\dots\dots (۱۲)$

اس لئے  $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{و} = \text{ا فو}$

اور  $\frac{۱}{\text{ک}} = \text{ا فو} + \text{ب} \dots\dots\dots (۱۳)$

اب ذرہ کو خواہ کسی طرح پھینکا جائے، جیسے ت بڑھتا ہے لا متناہیاً  
انتہائی قیمت ب کے قریب آتا جاتا ہے۔

نیز اگر فراحت رفتار کے مربع کی طرح بدلے تو

$\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = \text{ک و}$

یا  $\frac{\text{فرو}}{\text{و}} = \text{ک فرت}$

اس لئے  $\frac{۱}{\text{و}} = \text{ک ت + ا} \dots\dots\dots (۱۴)$

ہذا  $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{و} = \frac{۱}{\text{ک ت + ا}}$

اور لا =  $\frac{۱}{جی}$  لوک (گت + ا) + جب ..... (۱۵)

(۲) سے ظاہر ہے کہ اگرچہ رفتار (و) متقارباً صفر ہوتی ہے تاہم طے شدہ  
فاصلہ کی کوئی انتہا نہیں ہے۔  
اگر ہم دوسرا طریقہ استعمال کریں تو (۱۰) کی بجائے

۲۱۸

مسادات و  $\frac{فر}{لا} = ف (و) \dots\dots\dots (۱۶)$

حاصل ہوتی ہے۔ اب اس صورت میں جبکہ فراحت رفتار کے متناسب ہے

$\frac{فر}{لا} = -ک$  اور و = -ک لا + ج ..... (۱۷)

پس  $\frac{فر}{فرت} + ک لا = ج \dots\dots\dots (۱۸)$

اور دفعہ ۱۵ سے لا =  $\frac{ج}{جی} + د فو \dots\dots\dots (۱۹)$

جہاں ج اور د اختیاری مستقل ہیں۔ نتیجہ (۱۳) کے مطابق ہے۔  
نیز اگر فراحت رفتار کے مربع کے متناسب ہو تو

$\frac{فر}{لا} = -ک و$  اور و = ج فو ..... (۲۰)

پس  $\frac{ک لا}{فرت} = ج$

اس لئے  $\frac{۱}{جی} فو = جت + د \dots\dots\dots (۲۱)$

یعنی ک لا = لوک (گت + جت + د) ..... (۲۲)

(۱) میں ا =  $\frac{ک د}{ج}$  اور ک ب = لوک ج رکھنے سے اس امر کی

تصدیق ہو سکتی ہے کہ یہ نتیجہ (۱۵) سے مختلف نہیں ہے۔

۱۶۵۔ مساواتیں جن میں ایک متغیر موجود نہیں ہے۔

(۱) اگر تاج متغیر صریحا موجود نہ ہو تو مساوات ذیل کی صورت کی ہوگی

$$\text{فہ} = \left( \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر}^2 \text{لا}} \right) ، \left( \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر}^2 \text{لا}} \right) = (۱) \dots \dots \dots (۱)$$

اس میں  $\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر}^2 \text{لا}}$  کی بجائے ج لکھنے سے، ج میں پہلے رتبہ کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ یعنی

$$\text{فہ} = (ج) ، \left( \frac{\text{فر}^2 \text{ع}}{\text{فر}^2 \text{لا}} \right) = (۲) \dots \dots \dots (۲)$$

اگر اس کا حل

$$ج = \text{ف} (لا) ، (۱) \dots \dots \dots (۳)$$

کی شکل میں رکھا جاسکتا ہے جہاں ۱ اختیاری مستقل ہے، تو دوسرے متحمل سے حاصل ہوگا

$$\text{ما} = \text{ف} (لا) ، (۱) \text{فر}^2 \text{لا} + ج \dots \dots \dots (۴)$$

اس میں ایک اختیاری مستقل ما کے ساتھ بطور اضافہ کے شریک

ہے۔ یہ بات ابتدائی سے ظاہر تھی کیونکہ ما کی بجائے (ما + ج)

لکھنے سے مساوات (۱) میں کوئی تغیر واقع نہیں ہوتا۔

(۲) اگر متبوع متغیر صریحا موجود نہ ہو تو مساوات ذیل کی صورت کی ہوگی

$$\text{فہ} = \left( \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر}^2 \text{لا}} \right) ، \left( \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر}^2 \text{لا}} \right) = (۵) \dots \dots \dots (۵)$$

اور دفعہ ۱۶۳ (۳) کے مطابق

(۶) .....  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ع} ، \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ع} \frac{\text{فرع}}{\text{فرما}}$  لکھنے سے حاصل ہوگا

(۷) .....  $\text{فدا} = \text{ع} \frac{\text{فرع}}{\text{فرما}} ، \text{ع} ، \text{ما} =$  جہاں بھی مساوات (۵) کی شکل سے نتیجہ نکالا جاسکتا تھا کہ ایک اختیار پر مستقل لا کے ساتھ بطور اضافہ نئے شریک ہوگا۔

(۸) .....  $\text{ع} = \text{ف} ( \text{ما} ، \text{لا} )$  تو دوسرے تکمل سے حاصل ہوگا

(۹) .....  $\text{م} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{لا} + \text{جب}$  یہاں بھی مساوات (۵) کی شکل سے نتیجہ نکالا جاسکتا تھا کہ ایک اختیار پر مستقل لا کے ساتھ بطور اضافہ نئے شریک ہوگا۔

(۱۰) ..... مثال (۱) (۱- لا)  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{لا} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$  اس سے حاصل ہوتا ہے کہ

اس لئے لوگ  $\text{ع} = \frac{1}{\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} - 1} = \frac{1}{\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} - 1}$  لوگ (۱- لا) + مستقل

(۱۱) ..... یا  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ع} = \frac{1}{\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} - 1}$

(۱۲) ..... اس لئے  $\text{ما} = \text{ا} \text{جب} \text{لا} + \text{جب}$  مثال (۲) تنجاذب کے نظریہ میں مساوات

(۱۳) .....  $\frac{\text{فرق}}{\text{فرلا}} + \frac{2}{\text{فر}} = \frac{\text{فرق}}{\text{فر}}$



اکثر نمودوار ہوتی ہے، فرق  $\frac{\text{فرق}}{\text{فر}}$  کو تابع متغیرانے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$(۱۴) \dots \dots \dots = \frac{2}{r} + \frac{\frac{\text{فرق}}{\text{فر}}}{\frac{\text{فرق}}{\text{فر}}}$$

اس لئے لوگ  $\frac{\text{فرق}}{\text{فر}} + 2$  لوگ  $r =$  مستقل

$$(۱۵) \dots \dots \dots \frac{1}{r} = \frac{\text{فرق}}{\text{فر}} \quad \text{یا} \quad \text{دوبارہ تکمیل کرنے سے}$$

$$(۱۶) \dots \dots \dots \frac{1}{r} + \text{ب} = \text{ق}$$

مثال (۳) ایسے منحنی دریافت کرو جن کا نصف قطر انحناء عماد کے مساوی ہے لیکن منحنی کے دوسرے جانب واقع ہے۔  
دفعات ۶۰ اور ۱۳۵ کے دیکھنے سے ظاہر ہے کہ مذکورہ بالا شرط سے ذیل کی مساوات حاصل ہوگی

$$\frac{\left\{ 1 + \left( \frac{\text{فرما}}{\text{فر}} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{فر}}{\text{فر}}} = \text{ما} \left\{ 1 + \left( \frac{\text{فرما}}{\text{فر}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

مختصر کر کے ابدال (۶) کے استعمال سے حاصل ہوتا ہے

$$(۱۸) \dots \dots \dots \frac{1}{\text{ما}} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرما}} + \frac{\text{ع}}{\text{ع} + 1}$$

اس لئے  $\frac{1}{\text{لوگ}} (\text{ع} + 1) = \text{لوگ ما} + \text{مستقل}$

اس لئے  $\frac{a}{c} = 1 + \frac{e}{c}$  ..... (۱۹)

جہاں 'ج' اختیاری مستقل کے طور پر لیا گیا ہے کیونکہ یہ لازماً مثبت ہے۔

اس لئے  $\frac{a}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{e}{c}$  ..... (۲۰)

متغیروں کو جدا کرنے سے

$$\frac{a}{c} \pm \frac{e}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{e}{c}$$

جہاں  $\frac{a}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{e}{c}$  ..... (۲۱)

جہاں 'ع' دوسرا اختیاری مستقل ہے۔

پس  $a = c \pm \frac{e}{c}$  ..... (۲۲)

جو زنجیرہ کے قبیل کو ظاہر کرتا ہے۔ دفعہ ۱۳۴ مثال (۱) دیکھو۔

## ۱۶۶ - دوسرے رتبہ کی خطی مساوات -

ایسی تفرقی مساوات جس میں تابع متغیر اور اس کے پلے ن مشتقوں کی صرف پہلی قوتیں موجود ہوں اور انکا کوئی حاصل ضرب موجود نہ ہوں۔ دس رتبہ کی تفرقی مساوات کہلاتی ہے لہذا دوسرے رتبہ کی عام خطی مساوات یہ ہوگی

$$\frac{a}{c} + f \frac{a}{c} + q \frac{a}{c} = r$$

جہاں 'ف'، 'ق' اور 'ر' متغیر 'ا' کے معلومہ تفاعل ہیں۔  
خدا ہم خواص تمام خطی مساواتوں میں مشترک ہیں۔ ہم دوسرے رتبہ کی مساوات کے لئے انکے ثبوت دینگے لیکن غل سے ظاہر ہوگا

کہ عام شکل کے لئے بھی اس کی توسیع باسانی ہو سکتی ہے۔

۴۲۱

(آ) مساوات (۱) کا مکمل حل

$$\text{ما} = \text{ط} + \text{ع} \dots \dots \dots (۲)$$

کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے جہاں (ط) ایسا تفاعل ہے کہ یہ مساوات (۱) کی موجودہ صورت کو پورا کرتا ہے اور (ع) مساوات

$$\text{فر} \text{ما} + \text{ف} \text{فر} \text{ما} + \text{ق} \text{ما} = \dots \dots \dots (۳)$$

کا عام حل ہے جہاں مساوات (۳) مساوات (۱) کے بائیں جانب کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔

اب اس مفروضہ کی بناء پر کہ  $\text{ما} = \text{ط} + \text{ع}$  جہاں ط مساوات (۱) کو پورا کرتا ہے اور ع دریافت طلب ہے مساوات (۱) میں اندراج سے

$$\text{فر} \text{ع} + \text{ف} \text{فر} \text{ع} + \text{ق} \text{ع} + \text{فر} \text{ط} + \text{ف} \text{فر} \text{ط} + \text{ق} \text{ط} = \text{ر}$$

اور چونکہ مفروض سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{فر} \text{ط} + \text{ف} \text{فر} \text{ط} + \text{ق} \text{ط} = \text{ر} \dots \dots \dots (۴)$$

$$\text{اس لئے فر} \text{ع} + \text{ف} \text{فر} \text{ع} + \text{ق} \text{ع} = ۰ \dots \dots \dots (۵)$$

یعنی تفاعل ع مساوات (۳) کو پورا کرتا ہے۔

مساوات (۱) کے مکمل حل کے دو حصے ط اور ع کو

بالترتیب 'خاص تکملہ' اور 'متمم تفاعل' کہتے ہیں۔ یہ واضح رہے کہ خاص تکملہ ابتدائی تفرقی مساوات کا کوئی حل ہے اورვნاسادہ ہو بہتر ہوگا۔ برخلاف اس کے متمم تفاعل مساوات (۳) کا عام حل ہے۔

(۲) اگر  $۱ع + ۱ج + ۱م$  مساوات (۳) کے کوئی دو حل ہوں تو

مساوات کو پورا کرے گا۔ اس میں  $۱ج + ۱ع + ۱م$  اختیار کی مستقل ہیں۔ مساوات میں درج کرنے سے باآسانی اس امر کی تصدیق ہو سکتی ہے لہذا اگر تفاعل  $۱ع$  اور  $۱ج$  ایک دوسرے کے تابع نہ ہوں یعنی ایک تفاعل دوسرے کا محض مستقل ضعیف نہ ہو تو ضابطہ (۶) سے مساوات (۳) کا ایسا حل حاصل ہوتا ہے جس میں دو اختیاری مستقل موجود ہیں۔

(۳) اگر مساوات (۳) کا کوئی خاص تکملہ (و) معلوم ہو تو ابدال

ما = می و سے مساوات (۱)  $\frac{فری}{فرلا}$  میں پہلے رتبہ کی مساوات میں تبدیل ہو جاتی ہے اور اس لئے مساوات (۱) کا مکمل حل اس پہلے رتبہ کی مساوات کے تکمل پر آ کے منحصر ہوتا ہے۔ کیونکہ مساوات (۱) ہو جاتی ہے۔

$$و = \frac{فری}{فرلا} + (۲) \frac{فرو}{فرلا} + (و) \frac{فری}{فرلا} + (ف) \frac{فرو}{فرلا} + (قو) می = ص$$

جو مفروض کی بنا پر

$$و = \frac{فری}{فرلا} + (۲) \frac{فرو}{فرلا} + (ف) \frac{فری}{فرلا} = ص \dots (۸)$$

میں تحویل ہو جاتی ہے۔ یہ تابع متغیر  $\frac{فری}{فرلا}$  میں پہلے رتبہ کی خطی مساوات ہے۔ بالخصوص اگر  $ص = ۰$  تو

$$(۹) \quad \frac{فری}{فرلا} + \frac{۲}{و} \frac{فرو}{فرلا} + ف = ۰$$

اس لئے لوک فری + ۲ لوک و + ف فرلا = مستقل

یا  $\frac{فری}{فرلا} = \frac{۱}{و} - \frac{ف}{و} فرلا$  ..... (۱۰)

پس ی =  $\frac{۱}{و} فری$  - ف فرلا + جب ..... (۱۱)  
اور اس لئے (۳) کا مکمل حل ہے

ما =  $\frac{۱}{و} فری$  - ف فرلا + جب و ..... (۱۲)

اب خطی مساواتوں کو مختلف ترکیبوں سے تکمیل کرنے کی چند مثالیں  
دیجائیں گی۔ سلسلوں میں تکمیل کرنے کے طریقوں پر چودھویں باب میں  
غور کیا جائے گا۔  
مثال (۱) آواز کے نظریہ میں اور طبیعیاتی ریاضی کی دیگر شاخوں میں ذیل کی مساوات  
اکثراً ملتی ہے

$\frac{فر۱}{فر۲} + \frac{۲}{ر} - \frac{فر۱}{فر۲} + گ۱ فر۱ = ۰$  ..... (۱۳)

اگر اسے ر سے ضرب دیں تو یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$\frac{فر۱}{ر} - (فر۱) + گ۱ (فر۱) = ۰$  ..... (۱۴)

اس لئے دفعہ ۶۳ کی رو سے

$فر۱ = (اجم رگ ر) + جب جب رگ ر$

یا  $فر۱ = \frac{(اجم رگ ر) + جب جب رگ ر}{ر}$  ..... (۱۵)

مثال (۲) (۱-لا)  $\frac{فر۱}{فر۲} - لا \frac{فر۱}{فر۲} + ما = ۰$  ..... (۱۶)

ظاہر ہے کہ  $\text{لا} = \text{لا}$  اس کا ایک خاص حل ہے۔

اس لئے  $\text{لا} = \text{لا}$  ہی رکھنے سے

(۱۷)

$$(18) \dots = \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} (3 - 2) + \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} (1 - 2) \dots$$

۲۲۳

اب متغیروں کو جدا کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$(19) \dots = \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} + \frac{2}{\text{لا}} - \frac{\text{لا}}{\text{لا} - 1}$$

$$(20) \dots = \frac{1}{\text{فرلا} - 1} = \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$$

$$(21) \dots = \frac{\text{لا} - 1}{\text{لا}} + \text{جب}$$

اس لئے (۱۶) کا مکمل حل ہے

$$(22) \dots = \text{لا} = \frac{\text{لا} - 1}{\text{لا}} + \text{جب}$$

$$(23) \dots = \text{لا} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{لا} = \text{لا}$$

اتفاق سے یہ "ٹھیک" مساوات ہے۔ یعنی دایاں رکن،  $\text{لا}$ ،  $\text{فرما}$ ،  $\text{فرلا}$  کے ایک تفاعل کا ٹھیک تفریق سر ہے، کیونکہ مساوات لکھی جاسکتی ہے

$$\{ (1 + \text{لا}) \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + 2 \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \} + \{ \text{لا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{لا} \} = \text{لا}$$

$$(24) \dots = \text{لا} = \text{لا} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} (1 + \text{لا})$$

یہ پہلے رتبہ کی خلی مساوات ہے۔ اور ظاہر ہے کہ اس کا مکمل جزو ضروری

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \text{ ہے۔ اس لئے}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \right\}$$

$$\therefore \sqrt{1+a^2} = (جنتا' ۱ + ب) \dots \dots (۲۵)$$

## امثلہ ۵۵

$$(۱) \quad \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = 1 \quad [ما = ۱ \text{ لوک } ۱ + (۱ + ب)]$$

$$(۲) \quad \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \quad [ما = (۲ - ۱) + ۱ + (۱ + ب)]$$

$$(۳) \quad \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \quad [ما = ۱ \text{ لوک } \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + (۱ + ب)]$$

(۴) ایک افقی سلاخ پر صرف اس کا وزن اور اس کے ٹیکوں کے

دباؤ عمل کر رہے ہیں۔ سلاخ کے انصراف کے لئے تفرقی مساوات یہ ہے

$$ب = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = ۱$$

جہاں 'و' وزن فی اکائی طول ہے۔

و کو مستقل مانکر اس مساوات کو تکمیل کرو اور مستقامت کو ذیل کے شرائط کے تحت دریافت کرو

$$ما = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = ۱ \text{ جبکہ } ۱ = ۱ \text{ اور نیز جبکہ } ۱ = ۱$$

[یہ صورت (۱)، طول والی یکساں سلاخ میں پیدا ہوگی جو سروں پر لگی ہوگی]

(۵) [جب  $\frac{۱}{۲۴} = \frac{۱}{۲۴} (ل - لا) (ل + لا - لا)$ ] مذکورہ بالا سوال کو ذیل کے شرائط کے ماتحت حل کرو

$$ما = \frac{فر}{فرلا} = . جبکہ لا = . اور نیز لا = ل$$

[یہ صورت ایک سلاخ کی ہے جو دونوں سروں پر جکڑی ہوئی ہے]

$$[جب ما = \frac{۱}{۲۴} (ل - لا) (ل + لا - لا)]$$

(۶) سوال (۴) کی مساوات کو ذیل کے شرائط کے ماتحت حل کرو

$$لا = . کے لئے ما = \frac{فر}{فرلا} = . اور لا = ل کے لئے \frac{فر}{فرلا} = \frac{فر}{فرلا} = .$$

[یہ صورت ایسی سلاخ کی ہے جسکا ایک سرا جکڑا ہوا ہے اور دوسرا آزاد ہے]

$$[جب ما = \frac{۱}{۲۴} (ل - لا) (ل + لا - لا)]$$

(۷) مساوات  $\frac{فر}{فرلا} = .$  مسا لا + ف کو حل کرو اور حل کی طبیعی

تعبیر بناؤ۔

$$[لا = \frac{ف}{ما} + عجم (امات + صم)]$$

(۸) ایک ذرہ کی خلی حرکت کی تفرقی مساوات جس پر فاصلہ کے متناسب

قوتِ اندفاع عمل کر رہی ہے  $\frac{فر}{فرلا} = ما$  ہے۔ ثابت کرو کہ اسکا

حل ذیل کی تین شکلوں میں سے کوئی ایک ہے اور نتیجوں کی طبیعی تعبیر بناؤ

$$لا = لا جنم (امات + صم) لا = لا جنم (امات + صم) لا = لا جنم (امات + صم)$$

(۹) ایک ذرہ حالت سکون سے فاصلہ (۱) سے قوت کے مرکزی طرف

حرکت کرتا ہے۔ کشش کا اسراع مساوی ہے  $ما$  (فاصلہ) کے۔ ثابت کرو کہ مرکزی گرنے کا وقت  $\frac{۱}{ما}$  ہے۔



(۱۰) مرکزی ہمار کی عام تفرقی مساوات

$$\frac{فرما}{فرطما} = ۶ + \frac{ف}{۲۶} \quad \text{ہے جہاں 'ف' کا معلومہ تفاعل ہے۔}$$

اس کا پہلا مکمل دریافت کرو۔

$$\left[ \frac{فرما}{فرطما} \right] = ۶ + \frac{ف}{۲۶} \quad \text{[ج + ج]}$$

(۱۱) مساوات  $\frac{فرما}{فرطما} = \frac{۴}{۲۶}$  کو حل کرو اور ثابت کرو کہ حل مائل ہے

$$۲ = ۱ + ۲ \text{ جب } ۲ + ۲ = ۴$$

جہاں متعلقات 'ا' جب اور 'ج' میں ذیل کا ربط ہے

$$۱ - ۲ = ۴$$

۴۲۵

$$(۱۲) \quad \frac{فرما}{فرطما} = \frac{فرما}{فرطما} \quad [ما = ا + ب + و]$$

$$(۱۳) \quad \frac{فرما}{فرطما} = \frac{فرما}{فرطما} = ۱ \quad [ا + (ما - ب) = \frac{۴}{۹} (لا - عا)]$$

$$(۱۴) \quad \frac{فرما}{فرطما} = \frac{فرما}{فرطما} = ۰ \quad [ما = ا + لوک (لا - عا)]$$

$$(۱۵) \quad \frac{فرما}{فرطما} = \frac{فرما}{فرطما} = ۱ \quad [ما - ب = ا + جنم (لا - عا)]$$

$$(۱۶) \quad \frac{فرما}{فرطما} = \frac{فرما}{فرطما} = ۱ + ۲ \quad [ما = ب + لوک جم (لا - عا)]$$

$$(۱۷) \quad \frac{فرما}{فرطما} = \frac{فرما}{فرطما} \quad [ما = ا + ب + ج + و + د + و]$$

$$(۱۸) \quad \frac{فرما}{فرطما} = \frac{فرما}{فرطما} = ۰ \quad [ما = ا + ب + ج + جم + لا + د + جب + لا]$$

$$(۱۹) \quad \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} + \frac{۱}{\text{فرق}} = \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} \quad [\text{ق} = \text{الوک} + \text{ب}]$$

$$(۲۰) \quad \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} = \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} \quad [\text{ما} = \text{لا} + \text{ب}]$$

$$(۲۱) \quad \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} + \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} = \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} \quad [\text{ما} = ۲ \text{ به} + \text{منه به} (\text{لا} - \text{ع})]$$

$$(۲۲) \quad (۱ + \text{لا}) \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} + ۱ + \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} = \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} \quad [\text{ما} = \text{به} + (۱ + \frac{۱}{\text{ع}}) \text{لوک} (\text{لا} - \text{ع})]$$

$$[\text{ما} = \text{به} + (۱ + \frac{۱}{\text{ع}}) \text{لوک} (\text{لا} - \text{ع})]$$

$$(۲۳) \quad (۱ + \text{لا}) \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} + \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} = \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} \quad [\text{ما} = \text{ب} + \text{جنر لا}]$$

$$(۲۴) \quad (۱ - \text{لا}) \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} + \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} = \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} \quad [\text{ما} = \text{ب} + \text{جنر لا}]$$

$$(۲۵) \quad (۱ + \text{لا}) \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} + \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} = \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} \quad [\text{ما} = \text{مس لا} + \text{ب}]$$

$$(۲۶) \quad (۱ - \text{لا}) \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} + \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} = \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} \quad [\text{ما} = \frac{\text{لا} + \text{ب}}{\text{لا}}]$$

$$(۲۷) \quad \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} = \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} \quad [\text{ما} = \frac{\text{ب}}{\text{لا} + \text{ب}}]$$

$$(۲۸) \quad \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} - ۱ = \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} \quad [\text{ما} = \text{لا} + \text{لا} + \text{ب}]$$

$$(۲۹) \quad (۱ - \text{لا}) \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} - \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} = \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} \quad [\text{ما} = (\text{ج} - \text{لا}) + (\text{ج} - \text{لا} + \text{ب})]$$

$$[\text{ما} = (\text{ج} - \text{لا}) + (\text{ج} - \text{لا} + \text{ب})]$$

$$(۳۰) \quad \frac{فرلا}{فرلا} \{ (۱-لا) \frac{فرلا}{فرلا} \} = \{ \frac{فرع}{فرلا} \} = [۱+ج+ب+منرا] لا$$

$$(۳۱) \quad \frac{فرملا}{فرملا} \{ (۱-ملا) \frac{فرع}{فرملا} \} = ۲+۱=۳$$

$$(۳۲) \quad [۱+ج+ب+ (۱-ملا) منرا] لا$$

ایسے منحنی دریافت کرو کہ نصف قطر انحناء عماد کے مساوی ہے اور یہ دونوں منحنی کے ایک ہی جانب واقع ہیں۔

$$(۳۳) \quad [دائرے (لا-علا) + علا = ۲+۱=۳] لا$$

ایسے منحنی دریافت کرو کہ نصف قطر انحناء عماد کا دو چہرہ ہے اور یہ دونوں منحنی کے مخالف جانب واقع ہیں۔

$$(۳۴) \quad \text{مکائی (لا-علا) = ۲+۱=۳} لا$$

ایسے منحنی دریافت کرو کہ ما محور پر نصف قطر انحناء کا مستقل رک کے مساوی ہے۔

$$(۳۵) \quad [علا = ۲+۱=۳] لا$$

ایسے منحنی دریافت کرو جبکہ نصف قطر انحناء عماد کے مکعب کے متناسب ہے

[مخروطی تراشیں جن میں لا محور، محور تشاکل ہے]

$$(۳۶) \quad (۱+لا) \frac{فرلا}{فرلا} + لا \left( \frac{فرلا}{فرلا} \right) = \frac{فرلا}{فرلا}$$

$$[علا = ۲+۱=۳] لا$$

$$(۳۷) \quad (۱-لا) \frac{فرلا}{فرلا} - \frac{فرلا}{فرلا} = \frac{فرلا}{فرلا} + لا = ۲$$

$$[علا = ۲+۱=۳] لا$$

$$(۳۸) \quad \frac{فرلا}{فرلا} + ف \frac{فرلا}{فرلا} + \frac{فرلا}{فرلا} = علا$$

$$[ما = فو (ا) فو (ف) فزلا (ب) ]$$

$$(۳۹) \quad \frac{فزما}{فزلا} + \frac{۲}{لا} \frac{فزما}{فزلا} - ما = . \quad [ما = \frac{ا(فو + ب) فو}{لا}]$$

$$(۴۰) \quad (۱ + لا) \frac{فزما}{فزلا} - \frac{۲}{لا} \frac{فزما}{فزلا} + ما = .$$

$$[ما = لا(ب + ا) - لا(۱)]$$

$$(۴۱) \quad (۱ + لا) \frac{فزما}{فزلا} + لا \frac{فزما}{فزلا} = ما' \quad [ما = لا(ب + ا) + لا(۲)]$$

$$(۴۲) \quad \text{مساوات (لا - ۱)} \quad \frac{فزما}{فزلا} - \frac{۲}{لا} \frac{فزما}{فزلا} + ما = . \quad \text{کو حل کرو}$$

$$(۴۳) \quad \text{اس کا ایک حل } ما = لا \text{ معلوم ہے۔} \quad [ما = لا(ب + ا) + لا(۱ + ۲)]$$

$$\text{مساوات } لا \frac{فزما}{فزلا} - (ن - لا) \frac{فزما}{فزلا} - ن ما = . \quad \text{کو حل کرو}$$

$$\text{جبکہ ایک حل } ما = فو \text{ ہے۔} \quad [ما = ا(فو + ب) فو (لا) فو (ف) فزلا]$$

$$(۴۴) \quad \text{مساوات (لا - ۱)} \quad \frac{فزما}{فزلا} + لا \frac{فزما}{فزلا} - ما = . \quad \text{میں ابدال}$$

می = جمن لا سے بتووع تغییر کو (می) میں تبدیل کرو اور اس کو حل کرو

$$[ما = ا(بم می + ب جب می)]$$

$$(۴۵) \quad \frac{فزما}{فزلا} + ۲نم (ن لا) \frac{فزما}{فزلا} + (م - ن) ما = .$$

$$[ما = \frac{ا(بم می + ب جب می) م لا}{جب ن لا}]$$

$$(۴۶) \quad (۱-لا) \frac{فر۲ ما}{فر۲ لا} - ۳ لا \frac{فر۲ ما}{فر۲ لا} - ما = ۰$$

$$\left[ \frac{اجب لا + جب}{۲ لا - ۱} = ما \right]$$

$$(۴۷) \quad لا۲ ما \frac{فر۲ ما}{فر۲ لا} + (ما - لا) \frac{فر۲ ما}{فر۲ لا} = ۲ [ ما = لا + جب لا ]$$

$$(۴۸) \quad لا ما \frac{فر۲ ما}{فر۲ لا} + لا (فر۲ ما) - ما \frac{فر۲ ما}{فر۲ لا} = ۲ [ ما = لا + جب ]$$

$$(۴۹) \quad ۳ \frac{فر۲ ما}{فر۲ لا} \times \frac{فر۲ ما}{فر۲ لا} = ۵ \left( \frac{فر۲ ما}{فر۲ لا} \right)$$

$$[ (ما - لا - جب) = ج لا + د ]$$

$$(۵۰) \quad ۲ \frac{فر۲ ما}{فر۲ لا} \times \frac{فر۲ ما}{فر۲ لا} = ۳ \left( \frac{فر۲ ما}{فر۲ لا} \right)$$

$$\left[ \frac{جب}{لا + ج} + لا = ما \right]$$



# تیرہواں باب

## مستقل سروں والی خطی مساواتیں

۴۲۸

۱۶۷۔ دوسرے رتبہ کی مساواتیں۔ متمم تفاعل۔

مستقل سروں والی خطی مساواتیں ریاضی طبیعیات میں اس کثرت سے واقع ہوتی ہیں کہ ان پر تفصیل سے غور کرنا مناسب ہوگا۔ اس تحقیق میں تبوع متغیر کے لحاظ سے عامل عف یا  $\frac{فر}{لا}$  کی چند خاصیتوں کو استعمال کرنے سے بہت سہولت پیدا ہوتی ہے۔

صفحہ ۲۹ میں ثابت کر دیا گیا ہے کہ عف کا عمل تقسیمی ہے یعنی اگر  $ع$  اور  $و$  متغیر  $لا$  کے تفاعل ہوں تو

$$عف(ع+و) = عف+ع+و \dots\dots\dots (۱)$$

نیز اگر  $لا$  مستقل ہو تو

$$(عف+و) = عف+ع+و = ع+و = ع(عف+و) \dots\dots\dots (۲)$$

$$اور عف(ع+و) = ع+و = \frac{فر}{لا} = ع(ع+و) \dots\dots\dots (۳)$$

اس لئے عف مستقل ضعیف کی شرکت میں قانون تبادولہ کے تابع ہے۔  
علاوہ ازیں عف قوت ثانی قانون کے بھی تابع ہے یعنی

$$عف^۳ عف^۲ = عف^{۳+۲} \dots\dots\dots (۴)$$

پس عامل عف بذات خود اور مستقل ضعیف کے ساتھ معمولی جبر و مقابلہ کے اساسی قوانین کو مانتا ہے۔ اس لئے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ جبر و مقابلہ کے وہ نتائج جو اوپر کے قوانین سے حاصل ہوتے ہیں موجودہ اطلاق کے لئے بھی درست ہونگے بشرطیکہ عف کی رقوم میں اس کے کوئی 'معنی' موجود ہو بطور مثال اگر  $لہ، لہ،$  مستقل ہوں تو

$$(عف - لہ) (عف - لہ) = (عف - لہ) (فرلا - لہ) \quad (۶)$$

$$= \frac{فرلا}{فرلا} - \frac{فرلا}{فرلا} (عف - لہ) = \frac{فرلا}{فرلا} - \frac{فرلا}{فرلا} (عف - لہ) \quad (۷)$$

$$= \frac{فرلا}{فرلا} - \frac{فرلا}{فرلا} (عف + لہ) = \frac{فرلا}{فرلا} + \frac{فرلا}{فرلا} لہ \quad (۸)$$

$$= [عف - (عف + لہ) + لہ] = لہ \quad (۹)$$

اب ہم دوسرے رتبہ کی مساوات پر غور کریں گے۔ یہ مساوات حرکیاتی سوالات میں اکثر نمودار ہوتی ہے۔

$$\frac{فرلا}{فرلا} + \frac{فرلا}{فرلا} + ب = م \quad (۱۰)$$

$$(عف + عف + ب) = م \quad (۱۱)$$

یعنی اگر  $\frac{۱}{۲} < ب$  تو اس کے معادل ہے

$$(عف - لہ) (عف - لہ) = م \quad (۱۲)$$

جہاں  $لہ، لہ،$  مساوات  $لہ + لہ + ب =$  کی اصلیں ہیں۔

$$یعنی لہ، لہ، = - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - ب \quad (۱۳)$$

$$(عف - لہ) (عف - لہ) = م \quad (۱۴)$$

تو مساوات (۸) سے حاصل ہوتا ہے

(عف۔ لہا) = (ج) ..... (۱۲)  
جو پہلے رتبہ کی خطی مساوات ہے دفعہ (۱۵) سے اس کا حل ہے

(ج) = (ا) ..... (۱۳)

اور نتیجہ (۱۱) میں درج کرنے سے

(عف۔ لہا) = (ا) ..... (۱۴)

اس لئے دفعہ (۱۵) (آ) سے

(ج) = (ج) + (ج) ..... (۱۵)

جہاں ج = (ا)

چونکہ ایک اختیاری مستقل ہے اس لئے ج، ج، ج بھی اختیاری  
مستقل ہونگے۔ اور عمل سے ظاہر ہے کہ (۱۵) مساوات (۶) کا عام سے عام  
حل ہے۔

اگر  $\frac{1}{a} = b$  تو مساوات (۹) کی لہا میں اصلیں مساوی ہیں  
اور (۱۴) ذیل کی شکل اختیار کرتا ہے

(عف۔ لہا) = (ا) ..... (۱۶)

اس کا عام حل دفعہ ۱۵ (۲) کے مطابق ہے

(ا) = (ا + ب) ..... (۱۷)

اگر  $\frac{1}{a} > b$  سے تو (۹) کو پورا کرنے والی لہا، لہا کی قیمتیں خیالی  
ہیں تاہم مذکورہ بالا طریقہ سے مساوات (۶) کا ایسا علامتی حل دریافت





(د) اگر  $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$  ب تو (۶) کا حل ہوگا  
 $ما = ج، قو + ج، قو$  جہاں  $لہ، لہ، لہ$  مساوات  
 $لہ + لہ + لہ = ب = ۰$  کی اصلیں ہیں۔

(ب) اگر  $\frac{1}{p} = \frac{1}{q}$  ب تو حل ہوگا

$ما = (ل + لا + ب) قو$

(ج) اگر  $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$  ب تو حل ہوگا

$ما = قو \times (ج + جم + لا + ب + جب + لا)$

جہاں  $ج = ب - \frac{1}{p}$

مثال (۱)  $\frac{1}{p} = \frac{1}{q}$  فرما  $ما = ۶ = ۰$  (۲۶)۔۔۔۔۔

لہ میں مساوات  $لہ + لہ + لہ = ۶ = ۰$  ہوگی۔

اس سے  $لہ = ۲$  اور  $۳$

پس  $ما = (ل + قو + ب) قو$  (۲۷)۔۔۔۔۔

مثال (۲)  $\frac{1}{p} = \frac{1}{q}$  فرما  $ما = ۴ + \frac{۴}{۴} + ۴ = ۰$

لہ میں مساوات  $(ل + لہ + لہ) = ۴ = ۰$  ہوگی

اس کی دو ہری اصل (۲) ہے۔

اس لئے  $ما = (ل + لا + ب) قو$  (۲۸)۔۔۔۔۔

مثال (۳) رقاص کی آزاد اہتزازی حرکت ایسے واسطے میں جس کی فراحت افکار

متناسب ہے ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتی ہے

$$\frac{فرق}{فرق} + \frac{ک}{فرق} = \frac{مسا}{فرق} \quad (۲۹)$$

جہاں ک رگڑ کی قدر ہے۔ یہی مساوات روپیہ کی سوئی کی حرکت کو بھی ظاہر کرتی ہے جبکہ اس پر ہوا کی لزوجیت کا اور اس امالی رو کا برقی مقناطیسی عمل ہو رہا ہو سوئی کی حرکت سے پاس کی دھات کی اشیاء میں پیدا ہوتی ہے۔  
مختلف ترقیم کو مد نظر رکھتے ہوئے مساوات (۲۹) کا حل جبکہ رگڑ کی قدر ایک خاص مقدار سے کم ہے یہ ہے

$$لا = ج \cdot قو - \frac{۱}{۲} ک \quad (۳۰)$$

جہاں ن، مسا -  $\frac{۱}{۲} ک$  ..... (۳۱)  
نتیجہ (۳۰) سے جو حرکت تعبیر ہوتی ہے اسے ایسی سادہ موسیقی حرکت خیال کیا جاسکتا ہے جس کا دور  $\frac{۲\pi}{ن}$  ہے اور جس کا حیثہ قانون  $قو - \frac{۱}{۲} ک$  کے مطابق متقارباً صفر تک کم ہوتا ہے۔ حل (۳۰) میں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ  $ک' > مسا - اگر ک' < مسا$  تو مناسب حل یہ ہوگا

$$لا = ۱ قو + ۲ لب + لب + لب ..... (۳۲)$$

جہاں لب، لب مساوات لب + لب + مسا = ..... (۳۳)  
کی اصلیں ہیں۔ مفروضہ کی بنا پر یہ اصلیں حقیقی ہیں اور چونکہ ان کا حاصل ضرب (مسا) مثبت ہے اس لئے یہ ایک ہی علامت کی ہونگی۔ نیز چونکہ ان کا حاصل جمع (ک) منفی ہے اس لئے دونوں اصلیں منفی ہونگی۔ اس لئے ہٹاؤ لا زیادہ سے زیادہ ایک مرتبہ صفر قیمت اختیار کرنے کے بعد متقارباً صفر کی طرف مائل ہوتا ہے۔  
یہ صورت نسبت گام روپیہ میں یا بہت زیادہ لزج مائع میں حرکت کرنے والے رتاقص میں نمودار ہوتی ہے۔

انتہائی صورت میں جبکہ  $ک' = مسا$

لا = (ا + ج + ت) قو  $\frac{1}{4}$  گت ..... (۳۴)

پہلا جزو ضربی، مطلق قیمت کے لحاظ سے ت کے ساتھ ساتھ لا انتہا بڑھتا ہے اور دوسرا گھٹتا ہے۔ لیکن چونکہ دوسرے جزو ضربی کا گھٹنا پہلے کے بڑھاؤ سے زیادہ تیز ہے اس لئے حاصل ضرب کی انتہائی قیمت ت سے  $\infty$  کے لئے صفر ہے دفعہ ۴۳ (۲) دیکھو۔

## ۱۶۸۔ خاص نمکملہ کی تعیین۔

اب ہم مستقل سردوں والی دوسرے رتبہ کی خطی مساوات کا خاص نمکملہ دریافت کریں گے جبکہ مساوات کا بائیاں جانب بھی وجود رکھتا ہو۔

پس (عف + ا + عف + ب) ما = س ..... (۱)

جہاں س متغیر لا کا ایک معلومہ تفاعل ہے۔ جیسے اوپر بیان ہو چکا ہے اس کا کوئی بھی خاص نمکملہ خواہ کسی طرح دریا ہوا ہو، حل کے لئے کافی ہوگا۔

پس خاص نمکملہ میں سے ایسی رقموں کو نظر انداز کر سکتے ہیں جو تمام تفاعل میں واقع ہوتی ہیں کیونکہ یہ مساوات (۱) کے دائیں جانب میں کسی رقم کا اضافہ نہیں کریں گے۔ برعکس اس کے ضرورت کے لحاظ سے ہم خاص نمکملہ میں تمام تفاعل کی کتنی بھی رقمیں جمع کر سکتے ہیں۔

نیز اگر س رقموں کا مجموعہ ہو تو ما کی وہ قیمتیں دریافت کرنی ہیں جنکو مساوات (۱) کی دائیں جانب میں درج کرنے سے بائیں جانب کی مختلف رقمیں حاصل ہوتی ہیں۔ خاص نمکملہ ما کی ان قیمتوں کا مجموعہ ہوگا۔ یہاں صرف نہایت کارآمد صورتوں پر غور کرنا کافی ہوگا۔

(۱) اگر س میں اس نمونہ ح  $\frac{1}{4}$  عدا ..... (۲)

کی رقم موجود ہو تو خاص نمکملہ میں متناظر رقم ہوگی

$$(۳) \dots \dots \dots \frac{ح}{ع + ع + ع + ع} \times \frac{ع}{ع} = ۱$$

کیونکہ اگر (۳) کی بائیں جانب پر فعال (ع + ع + ع + ع + ع) سے عمل کریں تو (۲) حاصل ہوتا ہے۔

یہ ضابطہ ناکام رہتا ہے اگر  $ع + ع + ع + ع + ع = ۱$ ۔

یعنی اگر  $ع$  شتم تفاعل کی ایک رقم ہو۔

پہلے دفعہ کی ترقیم میں فرض کرو کہ  $ع = ۱$ ، یعنی ذیل کی مساوات کو حل کرتا ہے

$$(۴) \dots \dots \dots (ع - ل) = ح = ع + ع + ع + ع + ع$$

(۵) اگر (ع - ل) =  $ع + ع + ع + ع + ع$  لکھیں تو اس سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$(۶) \dots \dots \dots (ع - ل) = ح = ع + ع + ع + ع + ع$$

دفعہ ۱۵، (۲) میں یہ بتایا گیا ہے کہ (۶) کا خاص ٹکڑہ ہے

$$(۷) \dots \dots \dots (ع - ل) = ح = ع + ع + ع + ع + ع$$

(۸) اب صرف مساوات (ع - ل) =  $ع + ع + ع + ع + ع$

کامل مطلوب ہے۔ اس کا تکمیل جزو نمبر (۷) ہے

$$(۹) \dots \dots \dots (ع - ل) = ح = ع + ع + ع + ع + ع$$

بائیں جانب کو بالخصوص تکمیل کرنے سے اور شتم تفاعل میں جو رقمیں حاصل ہو چکی ہیں انکو نظر انداز کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما}^{\text{لا}} = \frac{\text{ح}}{\text{لا}^{\text{لا}} - \text{لا}^{\text{لا}}} \times \frac{\text{لا}^{\text{لا}}}{\text{لا}^{\text{لا}}}$$

$$\text{یعنی} \quad \text{ما}^{\text{لا}} = \frac{\text{ح}}{\text{لا}^{\text{لا}} - \text{لا}^{\text{لا}}} \times \frac{\text{لا}^{\text{لا}}}{\text{لا}^{\text{لا}}} \quad (۱۰)$$

اگر عا مساوات عفا + عفا + ب = کی دوہری اصل  
ہو تو مزید ترسیم کی ضرورت ہے۔  
اب حل طلب مساوات اس شکل کی ہے

$$\text{(عفا - لا)}^2 \text{ ما}^{\text{لا}} = \text{ح}^{\text{لا}} \quad (۱۱)$$

حل کا پہلا قدم وہی ہے لیکن اب بجائے (۸) کے مساوات ہے

$$\text{(عفا - لا)}^2 \text{ ما}^{\text{لا}} = \text{ح}^{\text{لا}} \quad (۱۲)$$

دفعہ ۱۵۷ (۳) میں دریافت کیا گیا تھا کہ اس کا خاص نمونہ ہے

$$\text{ما}^{\text{لا}} = \frac{1}{4} \text{ ح}^{\text{لا}} \quad (۱۳)$$

نتائج کی صورتیں ایک دفعہ قائم کر دینے کے بعد، طالب علم اس میں بہت  
سہولت پائے گا کہ حسب موقع

$$\text{ما}^{\text{لا}} = \text{ح}^{\text{لا}} \quad \text{یا} \quad \text{ما}^{\text{لا}} = \text{ح}^{\text{لا}} \quad (۱۴)$$

میں سے مناسب حل کو فرض کرے اور مساوات

$$\text{(عفا + عفا + ب)}^2 \text{ ما}^{\text{لا}} = \text{ح}^{\text{لا}} \quad (۱۵)$$

میں درج کر کے ہر کی قیمت دریافت کرے۔

دفعہ ۱۶۹ میں جو ضابطے دیے جائیں گے ان کی وجہ سے حل میں بہت آسانی  
واقع ہوگی۔

(۲) اگر  $s$  میں  $ج$  جم  $ع$  لا +  $ک$  جب  $ع$  لا ..... (۱۶)  
کے نمونہ کی رقم موجود ہو تو فرض کر دو کہ

ما = (جم  $ع$  لا + جب  $ع$  لا ..... (۱۷)  
مساوات (۱) میں درج کرنے سے دائیں جانب مساوی ہے  
(-  $ع$  لا +  $د$   $ع$  لا +  $ب$   $د$   $ع$  لا +  $ج$  جم  $ع$  لا

+ (-  $ع$  لا +  $ب$   $د$   $ع$  لا +  $ب$   $د$   $ع$  لا) جب  $ع$  لا  
کے۔ پس جملہ (۱۷) کی رقم پیدا ہوگی بشرطیکہ  
(-  $ع$  لا +  $ب$   $د$   $ع$  لا +  $ج$  جم  $ع$  لا + (-  $ع$  لا +  $ب$   $د$   $ع$  لا)  $ب$  =  $ک$

(۱۸) .....  
سوائے اس خاص صورت کے جبکہ  $د = ۰$ ،  $ع$  لا =  $ب$  (جس پر ابھی غور  
کیا جائیگا) ان مساواتوں سے (-  $ع$  لا +  $ب$   $د$   $ع$  لا) ہو سکتے ہیں۔  
پس  $ما = \frac{(-  $ع$  لا +  $ب$   $د$   $ع$  لا +  $ج$  جم  $ع$  لا + (-  $ع$  لا +  $ب$   $د$   $ع$  لا)  $ب$ }{(-  $ع$  لا +  $ب$   $د$   $ع$  لا +  $ب$   $د$   $ع$  لا)}$

(۱۹) .....  
اگر تفرقی مساوات میں  $س$  (د) صفر ہے تو مذکورہ بالا نتائج میں اختصار  
ہو سکتا ہے۔ ظاہر ہے کہ مساوات

$\frac{ما}{فر} + ب = ما = ج$  جم  $ع$  لا +  $ک$  جب  $ع$  لا ..... (۲۰)  
کا خاص تکملہ ہوگا

ما =  $\frac{ج}{ب - ع$  لا +  $\frac{ک}{ب - ع$  لا جب  $ع$  لا ..... (۲۱)  
لیکن اگر  $ع$  لا =  $ب$  تو  $ل$  میں مشکل پیدا ہوتی ہے۔ اس صورت میں  
حل کی مناسب شکل کے لئے فرض کر دو کہ

ما =  $ع$  جم  $ع$  لا +  $و$  جب  $ع$  لا ..... (۲۲)  
اس کو درج کرنے سے

$$\frac{\text{فرما}^2}{\text{فرلا}^2} + \text{علا}^2 = (2 \text{علا}^2 + \text{علا}^2) \text{جم علا}^2$$

۲۳۲

پس اس صورت میں مساوات (۲۰) پوری ہوگی بشرطیکہ

$$\text{علا}^2 = 2 \text{علا}^2 \text{، علا}^2 = \frac{2}{2 \text{علا}^2}$$

$$\text{یعنی } 2 = 2 \text{علا}^2 \text{، علا}^2 = \frac{2}{2 \text{علا}^2} \text{..... (۲۳)}$$

اسلئے خاص نمبر ہے  $\text{علا}^2 = \frac{2}{2 \text{علا}^2}$  (جب علا)  $\frac{2}{2 \text{علا}^2}$  (جم علا)..... (۲۵)

$$\text{مثال (۱)} \quad \frac{\text{فرما}^2}{\text{فرلا}^2} + \frac{\text{فرما}^2}{\text{فرلا}^2} - 2 = 2 \text{علا}^2 = 2 \text{علا}^2 + 2 \text{علا}^2 \text{..... (۲۶)}$$

دفعہ ۱۶ مثال (۱) کے مطابق اسکا تمام تفاعل ہے

$$2 = 2 \text{علا}^2 + 2 \text{علا}^2$$

اگر فرض کیا جائے کہ  $2 = 2 \text{علا}^2$  تو مساوات (۲۶) کے دائیں جانب میں درج کرنے سے بائیں جانب کی پہلی رقم حاصل ہوتی ہے بشرطیکہ  $2 = \frac{1}{4}$  بائیں جانب کی دوسری رقم مذکورہ بالا استثنیٰ صورتوں میں سے ہے کیونکہ (۳) جبریہ مساوات

لما + لما = ۲ کی اصل ہے۔ اگر ہم فرض کریں کہ  $2 = 2 \text{علا}^2$  تو درج کرنے پر

زیر غور دوسری رقم حاصل ہوتی ہے بشرطیکہ  $2 = \frac{1}{5}$

اسلئے (۲۶) کا مکمل حل ہے

$$2 = 2 \text{علا}^2 + 2 \text{علا}^2 + \frac{1}{4} \text{علا}^2 - \frac{1}{5} \text{علا}^2 \text{..... (۲۷)}$$

$$\text{مثال (۲)} \quad \frac{\text{فرما}^2}{\text{فرلا}^2} + \frac{\text{فرما}^2}{\text{فرلا}^2} + 2 = 2 \text{علا}^2 + 2 \text{علا}^2 \text{..... (۲۸)}$$



دفعہ ۶۷، مثال (۲) میں متم تفاعل دریافت کیا گیا ہے اور وہ یہ ہے

$$ما = (ا + لا + ج) فو$$

بائیں جانب کی پہلی رقم حاصل کر چکے لئے فرض کرو کہ ما = فو اور اس سے حاصل ہوگا  $\frac{۱}{۱۶} =$  دوسری رقم لہذا میں مساوات کی دہری اصل کے جواب میں ہے

$$اسلئے ما = لا فو فرض کرنے سے حاصل ہوگا  $\frac{۱}{۴} =$$$

اس لئے (۲۸) کا مکمل مل ہے

$$ما = (ا + لا + ج) فو + \frac{۱}{۱۶} فو + \frac{۱}{۴} فو \dots \dots (۲۹)$$

مثال (۳) مساوات

$$\frac{فرا}{وقت} + گ = \frac{فرا}{وقت} + ما = فجم (پات + صہ) \dots (۳۰)$$

کا خاص بمعہ دریافت کرو۔

یہ زفام کی حرکت کی مساوات ہے جبکہ اس پر مزا حمت زفار کے متناسب عمل کر رہی ہے اور قوت، وقت کا سادہ موسیقی تفاعل ہے۔

$$فرض کرو کہ لا = (جم (پات + صہ) + ج جب (پات + صہ) ۲۳۵$$

(۳۱) .....

اسکو درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\begin{cases} پ' = ا + گ + ج + ما = ا = ف \\ پ' = ا + گ + ج + ما = ا = ف \end{cases} \dots (۳۲)$$

$$اس لئے ا = \frac{(ما - پ') ف}{(ما - پ') + گ} = \frac{گ پ ف}{(ما - پ') + گ}$$

(۳۳) .....

$$اگر کہیں ا = م جم صہ، ب = م جب صہ \dots (۳۴)$$

تو مل (۳۱) ذیل کی شکل اختیار کرتا ہے

$$(۳۵) \dots\dots\dots (صہ - صہ) \text{ (پ ت + صہ - صہ) } = \text{جم}$$

$$\text{جہاں } \text{صہ} = \left\{ \text{صہ} - \text{پ} + \text{گ} \right\} \text{، } \text{صہ} = \text{مس} - \text{گ} \text{ پ} \dots\dots (۳۶)$$

پس معلومہ دوری قوت کی وجہ سے جو ”قصری ہتزاز“ پیدا ہوتا ہے وہ دریا ہو گیا۔ ”آزاد ہتزاز“ جو عموماً ان کے علاوہ ان کے ساتھ موجود ہوتے ہیں متمم تفاعل سے ملینگے (دفعہ ۱۶۷ مثال (۳) دیکھو)۔

لیکن سوائے اس صورت کے جبکہ گ = ۰ آزاد ہتزاز ت کے بڑھنے کے ساتھ آہستہ آہستہ کم ہو کر معدوم ہو جائینگے۔

مثال (۴) ایک رفاص پر کوئی بیرونی فراحت عمل نہیں کر رہی ہے اسکے قصری ہتزاز معلوم کرو جو مساوات

$$\text{فر} + \text{ن} = \text{لا} = \text{ف جم (پ ت + صہ)} \dots\dots\dots (۳۷)$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

$$\text{اس کا خاص تہمکہ ہے } \text{لا} = \frac{\text{ف}}{\text{ن} - \text{پ}} \text{ جم (پ ت + صہ)} \dots\dots (۳۸)$$

یہ حل درست نہیں رہتا جبکہ پ = ن۔ اس صورت میں فرض کرو کہ

$$\text{لا} = \text{ج ت جب (ن ت + صہ)} \dots\dots\dots (۳۹)$$

یہ درج کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ مساوات (۳۷) پوری ہوگی بشرطیکہ

$$\text{ن ج} = \text{ف} \text{ یعنی ج} = \frac{\text{ف}}{\text{ن}} \dots\dots\dots (۴۰)$$

(۴۱) کی تعبیر یہ ہے کہ اگر بلا فراحت والے رفاص پر ایک ایسی دوری قوت عمل کر رہی ہو جس کا دور رفاص کے طبیعی دور کے مساوی ہے تو ابستہ میں

[یعنی عموماً طبیعی اطلاقات میں مساوات (۴۱) محض تقریبی ہوتی ہے اور لا کی ایک سے اعلیٰ قوتوں کو نظر انداز کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اس لئے جب محیطہ ایک خاص حد سے بڑھ جاتا ہے تو بعد کی حرکت کے لئے یہ مساوات تقریبی طور پر بھی صحیح نہیں رہتی]

تسری ہفتہ ہزارہا حیطہ۔ ت کے تناسب سے بڑے گا۔

## ۱۶۹۔ عامل عف کی خاصیتیں۔

دفعہ ۱۶۷، ۱۶۸ کے طریقوں کی توسیع مستقل سروں والی عام خطی مساوات

$$\frac{f_1}{f_2} + \frac{f_3}{f_4} + \dots + \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{f_{n+2}}{f_{n+3}} \quad \text{فرما} \quad \frac{f_1}{f_2} + \frac{f_3}{f_4} + \dots + \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{f_{n+2}}{f_{n+3}} \quad (۱)$$

کے لئے ہو سکتی ہے۔ اختصار کے لئے مساوات کو ذیل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں ۴۳۶

$$f_1 (عف) = f_{n+2} \quad (۲)$$

جہاں  $f_1$  (عف) ضعف کا منطق صحیح تفاعل ہے۔ ہم صرف یہ بتا دیتے کہ  $f_1 = f_{n+2}$  کے لئے (۱) کا عام حل جس میں  $f_1$  جداگانہ اختیار مستقل ہیں کس طرح دریافت ہو سکتا ہے۔ نیز  $f_1$  کی چند شکلوں کے لئے خاص حملہ کیسے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس امر کا ثبوت کہ اس طرح سے حاصل شدہ حل مساوات کا عام سے عام حل ہے یہاں نہیں دیا جائیگا۔ کیونکہ عملی اطلاعات میں ہمیں اختیاری مستطالات کی صورت اس مناسب تعداد سے سرکار سے جو سوال کے بانی ماندہ شرائط پورا کر دیں۔

عامل عف کی ذیل کی خاصیتیں کارآمد ہوں گی۔

$$(A) \text{ اگر } f_1 (عف) = f_{n+2} \text{ کا کوئی منطق صحیح تفاعل ہو مثلاً}$$

$$f_1 (عف) = f_2 + f_3 + f_4 + \dots + f_n + f_{n+1} \quad (۳)$$

$$\text{تو } f_1 (عف) = f_2 + f_3 + f_4 + \dots + f_n + f_{n+1} \quad (۴)$$

$$\text{کیونکہ } f_1 = f_2 + f_3 + f_4 + \dots + f_n + f_{n+1}$$

اس لئے  $f_1$  (عف) کی مختلف رقموں سے  $f_1$  (عف) کی مختلف رقمیں  $f_1$  کے ضعف کے طور پر حاصل ہوں گی۔

(۶) سا (عف) کے انہیں معنوں کے مطابق اگر ع لا کا کوئی تفاعل ہو تو

سا (عف)  $\overset{\text{لا}}{\text{فو}} = \overset{\text{لا}}{\text{سا}} \text{ (عف + لا)}$  ع ..... (۵)

کیونکہ ترتیب وار حاصل ہوتا ہے

عف  $\overset{\text{لا}}{\text{فو}} = \overset{\text{لا}}{\text{فو}} \text{ (عف + لا)}$  ع

عف  $\overset{\text{لا}}{\text{فو}} = \text{عف} \{ \overset{\text{لا}}{\text{فو}} \text{ (عف + لا)}$  ع

=  $\overset{\text{لا}}{\text{فو}} \text{ (عف + لا)}$  (عف + لا) ع

=  $\overset{\text{لا}}{\text{فو}} \text{ (عف + لا)}$  ع

اور اسی طرح عام طور پر

عف  $\overset{\text{لا}}{\text{فو}} = \overset{\text{لا}}{\text{فو}} \text{ (عف + لا)}$  ع

پس عامل سا (عف) کی مختلف رقموں سے، نتیجہ (۵) کی متناظر  
رقمیں حاصل ہوتی ہیں۔

(۳) اگر سا (عف) میں عف کی صرف جفت قوتیں ہوں تو  
اسے فہ (عف) سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ دفعہ ۶۴ سے معلوم ہے  
کہ اگر

ع = اجم عہ لا + جب جب عہ لا ..... (۶)

تو عف  $\overset{\text{لا}}{\text{ع}} = \overset{\text{لا}}{\text{عہ}}$  ع

اور اسلئے فہ (عف) ع = فہ (عہ) ع ..... (۷)

۱۷۰۔ مستقل سروں الی عام تفرقی مساوات۔ متمم تفاعل۔

مساوات فہ (عف) فہ = ..... (۱)

کا عام حل دریافت کرنا ہے۔

اب اگر  $f$  (عف) و منطق صحیح اجزائے ضربی میں تخیل ہو سکتا ہے  
یعنی  $f \equiv f \equiv f$  (عف) مسا (عف) ..... (۲)  
تو ظاہر ہے کہ مسا (عف)  $\equiv$  ..... (۳)  
کا کوئی حل مساوات (۱) کو پورا کرے گا۔

نیز چونکہ اجزاء مساویہ پذیر ہیں اس لئے  
 $f \equiv f$  (عف)  $\equiv$  ..... (۴)  
کا کوئی حل بھی مساوات کو پورا کرے گا۔ پس (۳) اور (۴) کے حل کا مجموعہ  
(۱) کو پورا کرے گا۔ دیگر اجزاء میں تحلیل کرنے سے ظاہر ہے کہ اگر

$f \equiv f \equiv f$  (عف)  $\equiv f \equiv f \equiv f$  (عف)  $\times f \equiv f$  (عف) ..... (۵)  
تو مساوات (۱) ذیل کی مساواتوں کے مختلف حل کے مجموعہ سے پوری  
ہوگی

$f \equiv f \equiv f$  (عف)  $\equiv$  ..... (۶)  
جبر و مقابلہ کے ایک ضابطہ کی بنا پر (جس کا ذکر دفعہ ۸۵ میں ہو چکا ہے)  
تفاعل  $f$  (عف) ہمیشہ پہلے اور دوسرے درجے کے حقیقی اجزاء میں  
تخیل ہو سکتا ہے بشرطیکہ اس کے سرچشتی ہوں۔ نیز ان مختلف اجزاء کے  
درجوں کا مجموعہ تفاعل کے درجے (مثلاً ۱) کے مساوی ہوگا۔ علاوہ  
اس کے پہلے درجے کے اجزاء ذیل کی شکل کے ہونگے

عف۔ لف۔ عف۔ لف۔ عف۔ لف۔ .....  
جہاں لف۔ لف۔ لف۔ ..... 'ف (لف)  $\equiv$  ..... (۷)  
کی حقیقی امیلیں ہیں اگر لف۔ مساوات (۷) کی اکہری اصل ہے تو نظام (۶)  
میں سے ایک مساوات ذیل کے نمونہ کی ہوگی

(عف۔ لف)  $\equiv$  ..... (۸)  
اس کا حل ہے  $\text{ج} = \text{فو}$  ..... (۹)

اب اگر (۷) کی تمام امیلیں حقیقی اور جداگانہ ہوں یعنی لف۔ لف۔ ..... لف۔ تو

مساوات (۱) کا حل جس میں  $n$  اختیاری مستقل شریک ہیں یہ ہوگا

$$M = J_1 \cdot J_2 + J_3 \cdot J_4 + \dots + J_{n-1} \cdot J_n \quad (10)$$

دفعہ ۱۶ (۱۵) دیکھو۔

اگر مساوات (۷) کی ضعیفی اصلیں ہیں تو (۱۰) کے بائیں جانب کی دو یا زیادہ  
رقمیں ایک دوسرے سے مل کر ایک ہو جاتی ہیں اور جداگانہ طول کی  
تعداد  $n$  سے کم ہو جاتی ہے۔ کمی پورا کرنے کے لئے جس معلوم ہے کہ  
اگر لہ مساوات (۷) کی درجہ کی اصل ہے تو ف (عف) میں ایک  
جزو ضربی (عف۔ لہ) ہوگا۔

۲۳۸

مساوات (عف۔ لہ)  $M =$  ..... (۱۱)  
کو حل کرنے کے لئے فرض کرو کہ

$$M = J_1 \cdot J_2 \quad (12)$$

اور (۱۱) میں درج کرنے سے دفعہ ۱۶ (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$(عف۔ لہ) \cdot M = (عف۔ لہ) \cdot (J_1 \cdot J_2) = J_1 \cdot J_2 \cdot (عف۔ لہ)$$

ظاہر ہے کہ عف۔ لہ  $=$  کا حل  $M = J_1 \cdot J_2 + J_3 \cdot J_4 + \dots + J_{n-1} \cdot J_n$  ہوگا

$$M = J_1 \cdot J_2 + J_3 \cdot J_4 + \dots + J_{n-1} \cdot J_n \quad (13)$$

پس ف (عف) کے درجہ کے جزو ضربی کے جواب میں اس حل میں  
درجہ اختیاری مستقل ہیں۔ دفعہ ۱۶ (۱۴) دیکھو۔

اگر ف (عف) کا ایک جزو ضربی دو درجہ جملہ ہو جوتا قابل تحویل ہو  
مثلاً عف + عف + عف ہو جہاں  $\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q} > 1$  (تو (۱) کے  
متم تقابل کا ایک حصہ ذیل کی مساوات کا حل ہوگا

$$(عف + عف + عف) \cdot M =$$

(۱۴) . . . .

اگر اس میں رکھیں

$$\text{ما} = \text{قو}^{\frac{1}{2}} \text{ می اور بیہ}^{\frac{1}{2}} = \text{ب} - \frac{1}{4} \text{ د} \dots \dots \dots (15)$$

تو دفعہ ۱۶۹ (۵) سے

$$(\text{عفا} + \text{د عفا} + \text{ب}) \text{ ما} = (\text{عفا} + \frac{1}{4} \text{ د}) + \text{بیہ}^{\frac{1}{2}} \text{ قو}^{\frac{1}{2}} \text{ می}$$

$$= \text{قو}^{\frac{1}{2}} \text{ می} \{ \text{عفا} + \text{بیہ}^{\frac{1}{2}} \}$$

اور چونکہ  $(\text{عفا} + \text{بیہ}^{\frac{1}{2}}) \text{ می} = \text{کامل می} = \text{گجم بیہ}^{\frac{1}{2}} + \text{گجم بیہ}^{\frac{1}{2}}$

ہے اسلئے  $\text{ما} = \text{قو}^{\frac{1}{2}} \text{ (گجم بیہ}^{\frac{1}{2}} + \text{گجم بیہ}^{\frac{1}{2}})$  ..... (۱۶)

اور یہ نتیجہ دفعہ ۱۶۷ (۲۴) کے مطابق ہے۔ پس  $\text{ف} (\text{عفا})$  کے ہر جداگانہ ناقابل تحویل دو درجی جزو ضربی کے جواب میں دو اختیار می مستقلوں والا حل حاصل ہوتا ہے۔

بالآخر اگر  $\text{ف} (\text{عفا})$  میں ایسے ناقابل تحویل دو درجی جملے ہیں جو ر مرتبہ واقع ہوتے ہیں تو مساوات

$$(\text{عفا} + \text{د عفا} + \text{ب}) \text{ ما} = \dots \dots \dots (17)$$

کو حل کرنا ہوگا۔ ابدال (۱۵) کو پھر استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$(\text{عفا} + \text{بیہ}^{\frac{1}{2}}) \text{ می} = \dots \dots \dots (18)$$

اس کا حل دریافت کرنے کے لئے فرض کرو کہ

$$\text{می} = \text{عجم بیہ}^{\frac{1}{2}} + \text{وجب بیہ}^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (19)$$

اب تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$(\text{عفا} + \text{بیہ}^{\frac{1}{2}}) \text{ عجم بیہ}^{\frac{1}{2}} = ۲ \text{ بیہ}^{\frac{1}{2}} (\text{عفا} + \text{عجم بیہ}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \text{ د}) + \dots \dots$$

$$(\text{عفا} + \text{بیہ}^{\frac{1}{2}}) \text{ عجم بیہ}^{\frac{1}{2}} = (۲ \text{ بیہ}^{\frac{1}{2}}) (\text{عفا} + \text{عجم بیہ}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \text{ د}) + \dots \dots$$

اور عام طور پر

(عفا + بیلا) سے جم بیلا = (۲ بیلا) (عفا سے) جم (بیلا +  $\frac{\pi}{2}$ ) + ... + (۲۰)۔  
 اس میں ۶ کے کم سے کم رتبہ والے مشتق کی رقم کو لکھا گیا ہے۔

(عفا + بیما) موجب بیما لا = (۲ بیما) (عفا و) جب (بیما لا +  $\frac{\pi}{4}$ ) + (۳۱)  
پس رشتہ (۱۹) مساوات (۱۸) کو پورا کر گیا بشرطیکہ  
عفا = ۶، عفا و = ۰، ... (۲۲)

یعنی:  $e = ہ + ہ + لا + ہ + لا + ..... + ہ + لا$   
اور  $و = گ + گ + لا + گ + لا + ..... + گ + لا$

اس لئے مساوات (۱) کا مکمل حل جس میں ۲ اختیاری مستقل میں یہ ہوگا

$$M = (H_1 + H_2 + \dots + H_n) + C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x} + C_3 e^{0x}$$

$(\text{گ} + \text{گ}) + (\text{گ} + \text{گ}) + \dots + (\text{گ} + \text{گ}) = \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \times 2$  فوج بہالا ..... (۲۴)

مثال (۱)  $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{فرما}{فرلا}$  ..... (۲۵)

ایک عفا (عفا - ا) ما = کی طرح لکھ سکتے ہیں۔  
اور اسلئے اسکا مکمل مل مساوات عفا<sup>۲</sup> ما =، (عفا - ا) ما = کے حل کے مجموعہ کے مساوی ہو گا۔

ما = ا. ب. ج. لا. ح. ق. . . . . (۲۶)

مثال (۲)  $\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x^2} \right) = -\frac{2}{x^3}$  ..... (۲۴)

اس کو ذیل کی طرح لکھ سکتے ہیں

$$(ع - م) (ع + م) (ع + م) (ع + م) = 6 =$$





کیونکہ دفعہ ۱۶۹ (۴) سے

$$\text{ف (عف) م} = \frac{\text{ح}}{\text{ف (عف)}} \text{ ف (عف) فو} = \text{ح فو}$$

لیکن اگر عا مساوات ف (عف) =  
کی اصل ہو تو یہ فابطہ صحیح نہیں رہتا۔  
اگر یہ اکہری اصل ہو تو لکھہ سکتے ہیں

ف (عف) = ف (عف) ف (عف) (عف - عا) ..... (۵)  
جہاں ف (عف) (عف) (عف - عا) بطور جزو ضربی کے شریک نہیں ہے

اب مساوات ف (عف) ف (عف) (عف - عا) م = ح فو پوری ہوگی

بشرطیکہ (عف - عا) م = ح فو پوری ہو۔  
دفعہ ۱۵۰ (۲) میں ثابت کیا گیا ہے کہ اسکا خاص تکملہ ہے

$$\text{م} = \frac{\text{ح}}{\text{ف (عف)}} \text{ لا فو} \text{ ..... (۷)}$$

اگر عا مساوات (۴) کی رتبہ کی اصل ہو تو لکھہ سکتے ہیں

ف (عف) = ف (عف) ف (عف) (عف - عا) ..... (۸)  
جہاں ف (عف) (عف) (عف - عا) بطور جزو ضربی کے شریک نہیں ہے

پس مساوات ف (عف) ف (عف) (عف - عا) م = ح فو ..... (۹)

پوری ہوگی بشرطیکہ (عف - عا) م = ح فو پوری ہو۔

اب اگر م = ح فو x می درج کریں تو دفعہ ۱۶۹ (۵) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{(عف - عا) م} = \text{ح فو عف سی}$$

اس لئے عفاً ی =  $\frac{ح}{فنا (عفا)}$

ظاہر ہے کہ اسکا فانس حل ہے ی =  $\frac{ح}{فنا (عفا)}$  الا

اس لئے مساوات (۹) کا فانس مسئلہ ہوگا  
ما =  $\frac{ح}{فنا (عفا)}$  لا شو کا صلا ..... (۱۰)

(۲) فرض کرو کہ سر میں ح جم عفا لا + گ جب عفا لا کے نمونہ کی رقم شریک ہیں۔

اب اگر ما = ح جم عفا لا + جب عفا لا ..... (۱۲)  
پر عامل فنا (عفا) سے عمل کیا جائے تو ظاہر ہے کہ اسی قسم کا جملہ مختلف سروں کے ساتھ حاصل ہوگا۔ اس لئے عموماً خاص محل دریافت کر نیلے لئے ما کی اس قیمت کو مساوات

فنا (عفا) ما = ح جم عفا لا + گ جب عفا لا ..... (۱۳)  
میں درج کیا جاتا ہے اور پھر مساوات کے دونوں جانب جم عفا لا اور جب عفا لا کے سروں کو مساوی رکھنے سے مستقلاً ح اور جب کی قیمتیں دریافت کی جاتی ہیں۔

ایک خاص صورت اکثر استعمال ہوتی ہے اور اس میں ح اور جب کی قیمتیں فوراً لکھی جاسکتی ہیں۔

یہ صورت ذیل کے نمونہ کی مساوات میں پیا ہوتی ہے

فنا (عفا) ما = ح جم عفا لا + گ جب عفا لا ..... (۱۴)  
یعنی فنا (عفا) میں عفا کی صرف حفت توئیں موجود ہیں۔  
دفعہ ۱۶۹ (۳) سے

ما =  $\frac{ح}{فنا (عفا)}$  جم عفا لا +  $\frac{گ}{فنا (عفا)}$  جب عفا لا ..... (۱۵)

یہ ضابطہ بے کار ہو جاتا ہے اگر فہا (عفا) = یعنی جبکہ فہا (عفا) میں  
عفا + عفا بطور جزو ضربی کے شریک ہے۔ اس صورت میں (۱۱) کے  
نمونے کی زمیں شتم تفاعل میں موجود ہوتی۔  
اگر جزو ضربی (عفا + عفا) صرف ایک مرتبہ واقع ہو تو لکھ سکتے ہیں  
فہا (عفا) = سہا (عفا) (عفا + عفا) ..... (۱۶)

اب مساوات

سہا (عفا) (عفا + عفا) = ح جم عفا لا + گ جب عفا لا ..... (۱۷)  
پوری ہوگی بشرطیکہ

(عفا + عفا) = ح جم عفا لا + گ جب عفا لا ..... (۱۸)  
ہذا یہ سوال دفعہ ۱۶۸ (۲) کی حل شدہ صورت میں تحویل ہو جاتا ہے۔  
پس خاص نمونہ ہوگا

$$= \frac{ح}{عفا سہا (عفا)} \div \frac{گ}{عفا سہا لا} \div \frac{لا}{جم عفا لا}$$

(۱۹) .....

اگر فہا (عفا) میں (عفا + عفا) بطور جزو ضربی کے مرتبہ شریک ہو تو  
فہا (عفا) = سہا (عفا) (عفا + عفا) ..... (۲۰)  
اور زیر غور سوال، ذیل کی مساوات کے خاص نمونہ دریافت کرنے میں تحویل  
ہو جاتا ہے

$$(عفا + عفا) = ح جم عفا لا + گ جب عفا لا ..... (۲۱)$$

اگر فرض کیا جائے کہ

$$= ح جم عفا لا - \left( \frac{چ}{۲} \right) + وجب عفا لا - \left( \frac{چ}{۲} \right) ..... (۲۲)$$

مفروض = ح جم عفا لا + وجب عفا لا بھی اتنا ہی کارگر ہوگا لیکن اوپر کے مفروضوں میں  
مختلف شکل سوچ سے منتخب کی گئی ہے کہ انکی مدد سے آخری نتیجہ نہایت برجستہ شکل میں لکھا جاسکتا ہے



جہاں لا نسق صحیح تفاعل ہے اور فرض کرو کہ درجہ کا ہے۔ اب فرض کرو  
 ما = لا اور جہاں ف (عف) میں عف کا کم سے کم قوت نما (م) ہے  
 اور لا کا درجہ کا منطق صحیح تفاعل ہے۔ اب انداز سے دیکھو  
 سرور کو دریافت کیا جاسکتا ہے۔

۱۷۲۔ متجانس خطی مساوات۔

$$\frac{لا^۱ فرض ما}{فرا^۱ لا} + \frac{لا^۲ فرض ما}{فرا^۲ لا} + \dots + \frac{لا^۱۰ فرض ما}{فرا^۱۰ لا} + \dots$$

$$+ \frac{لا^۱۱ فرض ما}{فرا^۱۱ لا} = سر \dots \dots \dots (۱)$$

کے نمونہ کی مساوات: بعض اوقات متجانس خطی مساوات کہلاتی ہے۔ اس  
 صورت میں عموماً صحیح تفاعل میں درجہ کے نمونے کی رقمیں ہوتی ہیں  
 جہاں درجہ اعشاری مستقل ہے اور کم کی قیمتیں دائیں جانب درج کر کے  
 سے دریافت ہو سکتی ہیں۔ نیز اگر سر میں ایک رقم خ لا پہا ہے تو خاص  
 نمونہ میں ماٹل رقم جب لا پہا ہوگی بشرطیکہ جب کو مناسب قیمت دیجائے  
 مذکورہ بالا بیان کی صداقت کے لئے ہم دوسرے رتبہ کی متجانس خطی مساوات  
 پر غور کریں گے۔

$$(۲) \quad مساوات \quad \frac{لا^۲ فرض ما}{فرا^۲ لا} + \frac{لا^۱ فرض ما}{فرا^۱ لا} + جب ما = ۰$$

کو حل کرنے کے لئے

$$(۳) \quad فرض کرو کہ \quad ما = لا^۱۰ \dots \dots \dots$$

یہ رشتہ مساوات کو پورا کرے گا بشرطیکہ

$$(۴) \quad \{ م (م-۱) + م + ب \} لا^۱۰ = ۰$$

خطوط دھاتی { کے اندر کے جگہ کو صفر رکھنے سے م میں دوسرے

درجہ کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ اگر  $m, n$  ایک اعلیٰ ہوں تو مل ہوگا

$$ma = mb + mc + \dots + mn \quad (5)$$

نیز مساوات  $la = \frac{2}{3}fa + \frac{1}{4}fa + \frac{1}{5}fa + \dots + \frac{1}{n}fa$  کا خاص تکملہ

$$ma = b + c + \dots + n \quad (6)$$

ہوگا بشرطیکہ

اگر  $m$  میں مساوات کی اعلیٰ خیالی ہوں یا مساوی ہوں تو مشکلات پیدا ہوتی ہیں۔

نیز اگر  $m$  میں  $la$  کے نمونے کی رقم شریک ہے جبکہ  $m$  میں مساوات کی ایک اصل  $p$  ہے تو خاص تکملہ کے دریافت کرنے میں مزید مشکلات پیدا ہوتی ہیں۔ بہر صورت میں خاص تحقیقات سے بچنے کے لئے ہم ثابت کرینگے کہ متبوع متغیر کو بدلنے سے مساوات (۱) مستقل سروں والی خطی تفرقی مساوات میں ہمیشہ تحول کی جاسکتی ہے۔

اگر کہیں  $la = fo$  تو  $la$  کے کسی تفاعل  $e$  کے لئے

$$\frac{fe}{fo} = \frac{fe}{fo} \div \frac{fe}{fo} = \frac{fe}{fo}$$

یعنی  $la = \frac{fe}{fo}$  (۱۰)

ہم حال  $\frac{fe}{fo}$  کو (جولا  $\frac{fe}{fo}$  کے معادل ثابت کیا گیا ہے) طے سے ظاہر کریں گے۔

اب حسب معمول  $\frac{فر}{لا}$  کے لئے عفا استعمال کرنے سے

$$لا(عفا) = لا^{۱+۲} عفا^{۱+۲} = لا^{۱+۲} عفا^{۱+۲} + م^{۱+۲} لا^{۱+۲} عفا^{۱+۲}$$

$$\text{یعنی } لا^{۱+۲} عفا^{۱+۲} = لا(عفا-م) = لا(عفا-م) = لا(عفا-م) \dots\dots (۱۱)$$

اس ضابطہ میں  $م = ۱، ۲، ۳، \dots$  رکھنے سے  
 $لا(عفا)، لا(عفا)، لا(عفا)، لا(عفا)، لا(عفا)، \dots$   
 بالترتیب طاء، طاء، طاء، طاء، طاء، ..... کے رقوم میں ظاہر کئے جاسکتے ہیں  
 اب چونکہ مال طاء =  $\frac{فر}{طاء}$  کا عمل مبادلہ پذیر ہے اس لئے

$$لا(عفا) = طاء$$

$$لا(عفا) = طاء(۱-طاء)$$

$$لا(عفا) = طاء(۱-طاء) = طاء(۲-طاء)$$

اور اسی طرح عام ضابطہ ہے

$$لا(عفا) = طاء(۱-طاء) = طاء(۲-طاء) = طاء(۳-طاء) = طاء(۴-طاء) = طاء(۵-طاء) \dots\dots (۱۲)$$

اب اگر مساوات (۱) کی مختلف رقوموں میں ضابطہ (۱۲) سے حاصل شدہ قیمتیں  
 درج کی جائیں تو ما اور طاء میں مستقل سروں والی خطی مساوات ذیل کے  
 نمونے کی حاصل ہوتی ہے

$$ف(طاء) = ما = م یا ف (فر) = ما = م \dots\dots (۱۳)$$

$$\text{مثال (۱)} \quad \frac{فر}{فر} + \frac{۲}{فر} = \frac{فر}{فر} \dots\dots (۱۴)$$

اگر مساوات کو ر سے ضرب دیا جائے تو یہ (۱) کی شکل اختیار کرتی ہے

$$\text{پس } \frac{فر}{فر} + \frac{۲}{فر} = \frac{فر}{فر} \dots\dots (۱۵)$$



۴۴۵

$$ق = ج + ر$$

فرض کرو کہ

مساوات میں درج کرنے سے  $م = (۴-۱) + ۲ = ۵$  یعنی  $م = (۴+۱) = ۵$  حاصل ہوتا ہے  
پس  $م$  کی قابل قبول قیمتیں صفر اور  $-۱$  ہیں اور اس لئے حاصل ہوگا

$$ق = ۱ + \frac{ج}{ر} \dots \dots \dots (۱۶)$$

دفعہ ۱۶۵ مثال (۲) دیکھو۔

$$\text{مثال (۲)} \quad لا^۲ \frac{فرما}{فرلا} + ۲ لا \frac{فرما}{فرلا} - ۲ ما^۲ = لا^۲ \dots \dots \dots (۱۷)$$

متنم تقابل دریافت کرنے کے لئے فرض کرو کہ  $ما = ج + لا^۲$   
تو  $م = (۴-۱) + ۲ = ۵$  یعنی  $م = (۴+۲) = ۶$

اس لئے  $م = ۱ - ۲ = -۱$   
نیز  $ما = ج + لا^۲$  خاص تکملہ ہوگا بشرطیکہ  $(۱-۲)(۲+۲) = ج + ۱$  یا  $ج = \frac{۱}{۴}$

$$\text{اس لئے } ما = ۱ + لا + \frac{ج}{لا} + \frac{۱}{۴} لا^۲ \dots \dots \dots (۱۸)$$

$$\text{مثال (۳)} \quad لا^۲ \frac{فرما}{فرلا} - لا \frac{فرما}{فرلا} + ما^۲ = لا^۲ \dots \dots \dots (۱۹)$$

اس سے حاصل ہوتا ہے

$$\{ طا (طا - ۱) - طا + ۱ \} ما = فو$$

$$\text{یا } (طا - ۱) ما^۲ = فو$$

مختلف ترقیم کا خیال کرتے ہوئے دفعہ ۱۶۷ سے اسکا مل ہوگا

$$ما = (۱ + ج ط) ط + فو + \frac{۱}{۴} ط^۲ فو$$

یعنی لا کی رقوم میں

$$ما = (۱ + ج لوک لا) لا + \frac{۱}{۴} لا (لوک لا) \dots \dots \dots (۲۰)$$

مثال (۴)۔  $\frac{لا}{فر} = \frac{لا}{فر} + \frac{لا}{فر} + \frac{لا}{فر} + \dots + \frac{لا}{فر} = \frac{لا}{فر}$  (۲۱)

اس لئے (طا + ا) = طا = فو

پس  $\frac{طا}{۱۰} = \frac{جم}{۱۰} + \frac{جب}{۱۰} + \frac{جب}{۱۰} + \frac{فو}{۱۰}$

= (جم لوک) (لا) + (جب جب) (لوک) (لا) + (لا) (لا) (۲۲)

۳۷۱۔ ہمزاد تفرقی مساواتیں -

حرکات اور دیگر مضامین کے سوالات میں اکثر ہمزاد تفرقی مساواتوں کے ایسے نظاموں سے واسطہ پڑتا ہے جن میں ایک متبوع متغیر کے دو یا زیادہ تفاعل اور ان کے تفرقی سر موجود ہوتے ہیں۔ لیکن ہمیشہ مساواتوں کی تعداد تابع متغیروں کی تعداد کے مساوی ہوتی ہے۔

اہم تابع متغیروں کو حروف 'لا'، 'ما'، '... سے اور متبوع متغیر کو ت سے ظاہر کرتے۔

عام نظریہ کے مسائل پر غور کرنے کی بجائے یہاں چند مثالیں دے دیا کافی ہو گا جن سے عام طور پر کثیر الاستعمال طریقوں کی توضیح ہوگی۔

اول یہ ممکن ہے کہ ہر ایک دی ہوئی مساوات میں صرف ایک تابع متغیر موجود ہو اور اس لئے ان پر علیحدہ علیحدہ غور ہو سکتا ہو۔

مثال (۱)۔ یا ذیاض کے زیر عمل مریخی کی صورت میں اگر 'لا' اور 'ما' محور افقی اور عمود انتصابی ہوں تو

$\frac{فر}{فر} = \frac{فر}{فر} = \frac{فر}{فر} = \dots = \frac{فر}{فر}$  (۱)

پس  $\frac{لا}{۱۰} = \frac{لا}{۱۰} + \frac{لا}{۱۰} + \frac{لا}{۱۰} + \dots + \frac{لا}{۱۰}$  (۲)

اختیاری مستقلوں 'ا'، 'ب'، 'ج' سے مقام اور رفتار کے بارے میں چار ابتدائی شرائط پوری ہو سکتی ہیں۔

مثال (۲)۔ ایک ذرہ کی صورت میں، جس پر ایک ثبات مرکز (مبدأ) سے فاصلہ کے متناسب قوت کشش عمل کر رہی ہے

$$\frac{فرل}{فرت} = m_1, \frac{فرل}{فرت} = m_2, \dots, \frac{فرل}{فرت} = m_n \quad (3)$$

اس لئے لا = اجم امت + ارجب امت

ماہ جب جماعت + جب جب امت  
ان میں سے ت کو سا قہ کرنے سے

$$(ج\bar{ب} - ا\bar{ب}) + (ج\bar{ب} - ا\bar{ب}) = (ج\bar{ب} - ا\bar{ب}) - (ج\bar{ب}) \dots (۳)$$

اس سے ظاہر ہے کہ حرکت کا طریق قطع ناقص ہے۔

اگر وہی ہوئی مساواتیں جو تعداد میں ن ہیں اس سادہ نمونے کی نہ ہوں تو  
تفرق اور جبریہ عمل کی مدد سے تمام متبوع تغیروں 'لا' 'ما' 'ی' کو سوائے  
ایک تغیر (مثلاً لا کے) سا قاطع کیا جاسکتا ہے۔ مصلہ مساوات کو تحلیل کر نیچے  
بعد اگر لا کی عام قیمت مساواتوں کے ابتدائی نظام میں درج کی جائے تو  
معلوم ہو گا کہ نظام میں (ن-۱) مساواتیں باقی رہ جاتی ہیں جنہیں (ن-۱)  
متابع تغیر 'ما' 'ی' ... شریک ہیں۔ اس عمل کو بار بار دہرایا جاسکتا ہے  
تھا کہ ہر ایک تابع تغیر اور اختیار ی مستقلوں کی رقم میں بیاں ہو جائے۔  
خاص صورتوں میں زیادہ متشاکل عمل استعمال ہو سکتا ہے۔ ہم طبعی سوالات  
کی جید مثالوں پر اکتفا کریں گے۔

مثال (۳) اگر مبداء کے گرد زاویہ رتقارون سے گھومنے والے مستوی کے کسی ایک نقطہ کے محدوداً ماہوں

تر  $\frac{\text{فرق}}{\text{وقت}} = - \text{ن م ا}$ ،  $\frac{\text{فرق}}{\text{وقت}} = \text{ن لا}$  ..... (۵)

ماکو ساتھ کرنے سے  $\frac{\text{فرلا}}{\text{وقت}} = \text{ن}$  فرما  $\frac{\text{فرلا}}{\text{وقت}} = \text{ن}$  -

اسلئے لا = (ج م ن ت + صبر) ..... (۶)

جہاں اور صبر اختیاری مستقل ہیں۔  
(۵) کی پہلی مساوات میں لا کی اس قیمت کو درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ما = (ج ب ن ت + صبر) ..... (۷)

نیچوں (۶) اور (۷) سے ظاہر ہے کہ ہر نقطہ میدا کے گرد ذراوی زقارت سے دائرے بناتا ہے۔

مثال (۷)۔ برق، مقناطیسی امالہ کے نظریہ میں ذیل کی مساواتیں نمودار ہوتی ہیں

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ل} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فرت}} + \frac{\text{فر ما}}{\text{فرت}} + \text{را لا} = \text{ق} \\ \text{م} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فرت}} + \frac{\text{ن فر ما}}{\text{فرت}} + \text{س ما} = \text{ف} \end{array} \right. \dots (۸)$$

یہاں لا، ما، باہم متاثر دو دوروں میں برقی ردوں کو ظاہر کرتے ہیں۔ ر اور  
س دوروں کی فراحتیں ہیں، ل اور ن ذاتی امالوں کی شرحیں، م باہمی  
امالہ کی شرح، اور ق، ف بیرونی محرک برق قوتیں ہیں۔

اول فرض کر لے کہ ق = ۰، ف = ۰، تب

$$\text{لا} = \frac{\text{ل ت}}{\text{ل ت}}، \text{ما} = \frac{\text{ب فو}}{\text{ل ت}} \dots (۹)$$

سے مساواتیں (۸) پوری ہونگی بشرطیکہ

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ل} = \text{ل ت} + \text{را} = \text{م ل ت} + \text{ب} = ۰ \\ \text{م ل ت} + \text{را} + \text{ن ل ت} + \text{س} = \text{ب} = ۰ \end{array} \right. \dots (۱۰)$$

ان میں سے نسبت را، ب کو ساقط کرنے سے

$$\text{ل} = \text{ل ت} + \text{را} = \text{ن ل ت} + \text{س} = -\text{م ل ت} = ۰$$

یعنی (ل ن م) ل ت + (ل س + ن ر) ل ت + (س م) ل ت = ۰  
چونکہ (ل س + ن ر) ل ت = (ل ن م) ل ت = ۰

جو ایک مثبت مقدار ہے، اس لئے ظاہر ہے کہ دو درجی مساوات (۱۱) کی اصلیں ہمیشہ حقیقی ہوں گی۔

نیز طبعی وجوہات پر لائن لازماً  $\sqrt{m}$  سے بڑا ہے۔ پس (۱۱) سے ظاہر ہے کہ لہا کی دونوں اصلوں کی علامت ایک ہی ہوں گی کیونکہ ان کا حاصل ضرب مثبت ہے اور یہ علامت منفی ہوں گی کیونکہ ان کا حاصل جمع منفی ہے۔ پس اصلوں کو  $-لہا$ ،  $-لہب$  لکھنے سے حل حاصل ہوتے ہیں

$$\left\{ \begin{array}{l} -لہا، -لہب \\ -لہا، -لہب \end{array} \right. \begin{array}{l} لا = ار، فو \\ ما = حب، فو \end{array} \quad (۱۲)$$

جہاں مستقل  $ار، حب$  یا  $لہا، لہب$  میں رشتہ (۱۰) میں سے کسی ایک مساوات میں لہا کی بجائے  $-لہا$  یا  $-لہب$  لکھنے سے حاصل ہوتا ہے یعنی دراصل اختیاری مستقل کی تعداد صرف دورہ جاتی ہے۔ مساواتیں (۸) کے خطی ہونے کی وجہ سے اس صورت میں جبکہ  $ق = ف = ۰$ ۔

یہ مساواتیں بالترتیب لا اور ما کی مذکورہ بالا قیمتوں کے مجموعے سے پوری ہوتی ہیں، حل دور کی ابتدائی آزاد ہوتی رو کے کم ہوتے جانے کو ظاہر کرتا ہے اگر ق اور ف صفر نہ ہوں بلکہ معلومہ مستقل ہوں تو ظاہر ہے کہ (۸) کا خاص نمونہ ہوگا

$$لا = \frac{ق}{ر} \text{ اور } ما = \frac{ف}{س}$$

اس لئے مکمل حل ہوگا

$$\left\{ \begin{array}{l} -لہا، -لہب \\ -لہا، -لہب \end{array} \right. \begin{array}{l} لا = \frac{ق}{ر} + ار، فو \\ ما = \frac{ف}{س} + حب، فو \end{array} \quad (۱۳)$$

جہاں لہر، جب میں اور لہر، جب میں رشتوں کا ذکر اور ہر چوکا ہے۔  
 لا اور ما کی ان قیمتوں میں پہلی رقمیں ان قائم برقی روؤں کو ظاہر کرتی ہیں جو  
 دی ہوئی محرکہ برقی قوتوں کی وجہ سے وجود میں آتی ہیں۔ باقی ماندہ قیمتیں مالہ  
 کے اثر کو ظاہر کرتی ہیں۔ چونکہ درحقیقت دو اختیار ہی مستقل ضرر یک ہیں اس لئے  
 انکی ایسی قیمتیں دریافت ہو سکتی ہیں کہ برقی روؤں کی کوئی بھی دی ہوئی ابتدائی  
 قیمتیں ہوں۔

دوسری اہم صورت وہ ہے جس میں قی وقت کا سواہ موسیقی تفاعل اور ف منفرد ہوتا ہے۔

اس طرح ق = قی جم پ ت اور ف =۔ (۱۴)  
 رکھنے سے مساوات (۸) کا خاص تکمیل ذیل کے مفروض سے حاصل ہو سکتا ہے۔

(۱۵) ..... {  $\begin{aligned} & \text{ما} = \text{ب} \text{جم پت} + \text{ب} \text{آجب پت} \\ & \text{ما} = \text{آ} \text{جم پت} + \text{آ} \text{بجب پت} \end{aligned}$

لا اور ماکہ ان قیمتوں کو درج کر کے جم پت اور جب پت کے  
سروں کو علاحدہ علاحدہ صفحہ رکھنے سے

پ ل ا + پ م ب + ر = ق.  
 - پ ل ا - پ م ب + ر = -  
 (۱۶) .....  
 پ م ا + پ ن ب + س = ج =  
 - پ م ا - پ ن ب + س = ب =

$$\left. \begin{aligned} ۱ \text{ فرلا} + \text{ح فرما} &= ۱ لا + ۱ لا + ۱ لا + ۱ لا = ۴ \\ \text{ح فرلا} + \text{ح فرما} &= ۱ لا + ۱ لا + ۱ لا + ۱ لا = ۴ \end{aligned} \right\} \dots (۱۷)$$

۶۲۹ یہ ایسے بقائی حرکیاتی نظام کی حرکت کو ظاہر کرتی ہے جسے توازن کے مقام کی قربت میں دو درجے کی آزادی مائل ہو آزاد حرکت دریافت کرنے کے لئے لا = ما = رکھو اور فرض کرو کہ

$$لا = ف فو \quad ما = گ گت \quad (۱۸) \dots \dots \dots$$

$$\left. \begin{aligned} ۱ (لا + ۱ ف) + ۱ (ح لا + ۱ گ) &= ۰ \\ ۱ (ح لا + ۱ ف) + ۱ (ح لا + ۱ گ) &= ۰ \end{aligned} \right\} \dots (۱۹)$$

ان میں سے نسبت ف : گ کو ملاحظہ کرنے سے

$$\begin{aligned} ۱ (لا + ۱ ف) (ح لا + ۱ ب) - ۱ (ح لا + ۱ ف) (ح لا + ۱ ب) &= ۰ \\ یا (ح لا + ۱ ف) (ح لا + ۱ ب) - ۱ (ح لا + ۱ ف) (ح لا + ۱ ب) &= ۰ \end{aligned} \quad (۲۰)$$

$$\dots (۲۱)$$

یہ لا میں دو درجہ مساوات ہے

$$\left. \begin{aligned} ۱ (لا + ۱ ف) + ۲ (ح لا + ۱ ف) &= ۱ (لا + ۱ ف) + ۲ (ح لا + ۱ ف) \\ ۱ (لا + ۱ ف) + ۲ (ح لا + ۱ ف) &= ۱ (لا + ۱ ف) + ۲ (ح لا + ۱ ف) \end{aligned} \right\} \dots (۲۲)$$

$$\dots (۲۳)$$

بالترتیب نظام کی توانائی یا حرکت اور توانائی بالقوہ کو ظاہر کرتے ہیں۔

ان میں سے پہلا جملہ لازماً مثبت ہے پس ۱ (ح لا + ۱ ف) اور

۱ (ح لا + ۱ ف) اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ (۲۰) یا (۲۱) کا دریاں

جانب لا + ۰ اور لا = ۰ دونوں کے لئے مثبت ہوگا۔ اور لا = ۰ کے لئے

علامت وہی ہوگی جو (۱ ب - ۱ ف) کی ہے۔ نیز (۲۰) سے ظاہر ہے کہ

دایاں جانب لا = ۰ اور لا = ۰ کے لئے منفی ہوگا۔

پس اگر جملہ (۲۳) فی نفسہ منفی ہو یعنی لا اور ب منفی ہوں اور لا ب - ہ<sup>۲</sup> مثبت ہو تو مساوات (۲۱) لہذا کی دو مثبت اصلوں سے پوری ہوگی نہیں  
 سے ایک اصل ہر دو مقدار -  $\frac{ا}{ب}$  اور -  $\frac{ب}{ج}$  سے بڑی ہے اور دوسری اصل چھوٹی ہے۔

ان اصلوں کو لہذا، لہذا سے ظاہر کرنے سے حل حاصل ہوتا ہے  
 لا = ف، ف، ف + ف، ف، ف + ف، ف، ف + ف، ف، ف  
 ما = گ، گ، گ + گ، گ، گ + گ، گ، گ + گ، گ، گ  
 (۲۴)۔۔۔۔۔

ان آٹھ سروں میں سے اختیاری مستقل صرف چار ہیں نسبت ف، گ، (خوف، گ) کے مساوی ہے (۱۹) میں لہذا کی بجائے لہذا لکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح نسبت ف، گ، یا ف، گ مساوات (۱۹) میں لہذا کی بجائے لہذا لکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ باقی ماندہ چار اختیاری مستقل کی مدد سے لا، ما، فرلا، فرما کو کوئی بھی ابتدائی قیمت دیا جاسکتی ہے۔

اس سے ظاہر ہے کہ لا اور ما، ت کے ساتھ بے حد بڑھتے جائیں گے سوائے اس صورت کے کہ ابتدائی حالات کو اس طرح مرتب کیا جائے کہ ف، اور ف، صفر ہوں۔

پس اگر مقام توازن میں کی توانائی بالقوہ قریب کے کسی اور مقام کی توانائی سے زیادہ ہے تو کوئی خفیف اختیاری ہٹاؤ عموماً بڑھتا جائے گا پس مقام توازن، غیر قائم ہے۔

اگر اسکے برخلاف جملہ (۲۳) یقیناً مثبت ہو یعنی لا، ب، لا ب - ہ<sup>۲</sup> مثبت ہوں تو لہذا میں دو درجی مساوات کی اچھلیں دونوں منفی ہوگی اور ان میں سے ایک اصل صفر اور -  $\frac{ا}{ب}$  -  $\frac{ب}{ج}$  میں سے مقدار میں چھوٹی کے درمیان واقع ہوگی



اور دوسری اصل ان دونوں میں سے مقدار میں بڑی اور - ∞ کے درمیان ہوگی۔ اس سے ظاہر ہے کہ بجائے (۱۸) کے مناسب مفروض یہ ہے کہ

$$لا = ف + جم پ ت + ف + جب پ ت$$

$$ما = گ + جم پ ت + گ + جب پ ت \dots \dots (۲۵)$$

اس سے (۱۹) اور (۲۱) کی شکل کی مساواتیں حاصل ہونگی جنہیں لہذا کی بجائے  
- پ لکھ دیا گیا ہے۔ نیز اس سے ثابت ہوتا ہے کہ پ میں دو درجی مساوات کی اصلیں حقیقی اور مثبت ہونگی۔ انہیں پ اور پ سے ظاہر کرنے سے  
حاصل ہوتا ہے کہ مل ہے

$$لا = ف + جم پ ت + ف + جب پ ت + ف + جم پ ت + ف + جب پ ت$$

$$ما = گ + جم پ ت + گ + جب پ ت + گ + جم پ ت + گ + جب پ ت \dots (۲۶)$$

جہاں نسبتیں  $\frac{ف}{گ}, \frac{ف}{گ}, \frac{ف}{گ}, \frac{ف}{گ}$  مذکورہ بالا طریقہ پر دریافت ہو سکتی ہیں۔

نیز چونکہ  $\frac{ف}{گ} = \frac{ف}{گ}$  اور  $\frac{ف}{گ} = \frac{ف}{گ}$  اس لئے نتیجے ذیل کی طرح بھی لکھے جاسکتے ہیں

$$لا = ف + جم (پ ت + ط م) + ف + جم (پ ت + ط م)$$

$$ما = گ + جم (پ ت + ط م) + گ + جم (پ ت + ط م) \dots (۲۷)$$

جہاں  $\frac{ف}{گ}$  اور  $\frac{ف}{گ}$  قابل تفسیر ہیں۔ اس سے ظاہر ہے کہ اگر مقام توازن میں توانائی بالقوہ قریب مقاموں سے کم ہے تو خفیف ہواؤ کی صورت میں نظام مقام توازن کے گرد بہتر آزی حرکت کرے گا۔ اور اس لئے توازن قائم ہوگا۔

اس امر کو فرض کر لیا گیا ہے کہ لہذا (یا پ) میں دو درجی مساوات کی ملیں

الگ الگ ہیں۔ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اصلیں مساوی نہیں ہو سکتیں

سوائے اس صورت کے جبکہ  $\frac{1}{ا} = \frac{ب}{ح} = \frac{ھ}{خ}$  اور اگر یہ شرائط پوری ہوں تو حل ذیل کے دو نمونوں میں سے کسی ایک نمونے کا ہوگا

لا = ف فو + ف فو<sup>لہت</sup> ما = گ فو<sup>لہت</sup> + گ فو<sup>لہت</sup> ... (۲۸)

یا لا = ف جم پ ت + ف جب پ ت

ما = گ جم پ ت + گ جب پ ت ... (۲۹)

جہاں ہر دو صورتوں میں چاروں مستقل ایک دوسرے کے غیر تابع ہیں۔ آخر میں ہمیں اس صورت پر غور کرنا ہے جبکہ توانائی بالقوہ کے لئے جملہ (۲۳) کبھی مثبت ہے اور کبھی منفی۔ اس صورت میں جب - ھ منفی ہوگا اور لہا میں دو درجی مساوات کی ایک اصل مثبت ہوگی اور دوسری اصل منفی۔ اب مکمل حل ذیل کے نمونے کا ہوگا

لا = ف فو<sup>لہت</sup> + ف فو<sup>لہت</sup> + ف جم پ ت<sup>لہت</sup> + ف جب پ ت<sup>لہت</sup>

ما = گ فو<sup>لہت</sup> + گ فو<sup>لہت</sup> + گ جم پ ت<sup>لہت</sup> + گ جب پ ت<sup>لہت</sup> ... (۳۰)

اس سے ظاہر ہے کہ کوئی اختیاری خفیف ہما و عموماً بے مدبر ہوتا جائیگا۔ اس لئے اس مقام توازن کو غیر قائم شمار کرنا چاہئے۔

اس سوال کو حل کرنے کے ذرا دوسرے طریقے میں فرض کرو کہ

ما = لا ... (۳۱)

زیر غور مساواتیں اب ذیل کی شکل اختیار کرتی ہیں

(ا + ما ح) فز لا + (ا + ما ھ) لا = ۰  
(ح + ما ب) فز لا + (ھ + ما ب) لا = ۰ ... (۳۲)

یہ دونوں مساوات لا = ف فو<sup>ل</sup>ت سے یورپی ہوتی ہیں بشرطیکہ

$$(22) \dots \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n+1} = \frac{(n+1)}{n+1}$$

پس مسا دو درجی مساوات

(ح.ب. - ج.ه) ممّا + (ا.ب. - ج.د) ممّا + (ا.ه. - ج.ز) =

(۳۵) . . . . .

سے دریافت ہو سکتا ہے۔ اگر صہام اور صہام اسکی اصلیں ہوں تو لہا کی  
مائل فتمیں (۳۴) سے ملتی ہیں۔ اس طرح سے دو مل حاصل ہوتے ہیں جنکو  
تفرقی مساوات کے خطی ہونے کی وجہ سے ایک دوسرے کے ساتھ شریک کر سکتے ہیں۔  
اگر (۳۴) میں سے صہام کو سا قہ کر دیا جائے تو لہا میں وہی اوہروالی دو درجی مساوات  
مائل ہوتی ہے پس (۳۵) کی اصلوں کے تحقیقی ہو چکی شرطیں وہی ہوں گی جو (۲۱) کی صورت میں  
تھیں۔ اس امر کی باآسانی تصدیق ہو سکتی ہے۔

اگر لہا متھی ہے تو عمل ذل کے نمونے کا ہوگا

لا = فجم (پت + طہ) ما = فجم (پت + طہ)

(۴۶) لا = ف. جم (پ. ت + ط. ر)    ما = م. ف. جم (پ. ت + ط. ر)

جہاں فن، فہم، طہ، اختیار می مستقل ہیں۔

ان میں سے ہر ایک عمل بذات خود نظام کے ایسے اہتمام کو ظاہر کرتا ہے

جیسے اسکی طبیعت کیفیت کہہ سکتے ہیں۔

قصری اہتمز اور دریافت کر نیکے لئے جبکہ ذیل کے شکل کی قوتیں ۴ اور ۵

عمل کر رہی ہیں

(۲۴) ... (ن ت + ط) = جب (ن ت + ط) ...

فرض کر کہ  $\frac{1}{2} = \text{فجم (ن ت + طح)}$  ما = گ جب (ن ت + طح) - (۳۸)

اب متقل ف اورگ 'دوں میں اندراج سے مائل ہو سکتے ہیں۔ اسکے

تاکام رہنے کی ایک صورت وہ ہوگی جبکہ جملہ (۲۳) لازماً محبت ہوا کی وجہ سے

ن<sup>۱</sup> پ<sup>۱</sup> میں کی دودرجی مساوات کی ایک اصل سے منطبق ہو جائے گا۔

## مشلہ ۵۶

### (مستقل سر)

$$(۱) \quad \frac{فرما}{فرلا} + \frac{فرما}{فرلا} = [ما = (ا + ب) قو]^{لا}$$

$$(۲) \quad \frac{فرما}{فرلا} - \frac{فرما}{فرلا} - \frac{فرما}{فرلا} = [ما = (ا قو + ب قو)]^{لا۲}$$

$$(۳) \quad \frac{فرما}{فرلا} - \frac{فرما}{فرلا} + \frac{فرما}{فرلا} = [ما = (ا قو + ب قو)]^{لا۱}$$

$$(۴) \quad \frac{فرما}{فرلا} - \frac{فرما}{فرلا} + \frac{فرما}{فرلا} - \frac{فرما}{فرلا} = [ما = (ا قو + ب قو + ج قو)]^{لا۲}$$

$$[ما = (ا قو + ب قو + ج قو)]^{لا۲}$$

$$(۵) \quad \frac{فرما}{فرلا} = م [ما = (ا قو + ب قو + ج قو + د قو)]^{لا۲}$$

$$(۶) \quad \frac{فرما}{فرلا} - \frac{فرما}{فرلا} + \frac{فرما}{فرلا} - \frac{فرما}{فرلا} = [ما = (ا قو + ب قو + ج قو + د قو)]^{لا}$$

$$[ما = (ا قو + ب قو + ج قو + د قو)]^{لا}$$

$$(۷) \quad \frac{فرما}{فرلا} - \frac{فرما}{فرلا} + \frac{فرما}{فرلا} + \frac{فرما}{فرلا} = [ما = (ا قو + ب قو + ج قو + د قو)]^{لا}$$

$$[ما = (ا قو + ب قو + ج قو + د قو)]^{لا}$$

$$(۸) \quad \frac{فر۱}{فر۲} - \frac{فر۱}{فر۳} = ۱۳ = [ما = شو (اجم ۳ لا + جب جب ۳ لا)]$$

$$(9) \quad \frac{فرما}{فرلا} + \frac{فرما}{فرلا} + \frac{فرما}{فرلا} = [ما = قولا (اجم لا + جب جب لا)]$$

$$(10) \quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{f_1}{f_3} + \frac{f_1}{f_4} \quad \Rightarrow \quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{f_1}{f_3} + \frac{f_1}{f_4}$$

$$(ii) \quad \frac{فرما}{فرلا} + م = م \quad [ما = (الجبن) + ب جبن]$$

$$+ (ج. جنم) \frac{1}{4} + د. جنم \frac{1}{4} (ج. ج) \frac{1}{4}$$

$$(۱۲) \quad \frac{فر۱}{فر۱} + \frac{فر۲}{فر۱} - \frac{فر۳}{فر۱} = ۰ \quad [۶ = (هو) + (ج۱) + (ع۱)]$$

$$(13) \quad \frac{f_1^3}{f_1^2} - \frac{f_2^3}{f_2^2} - \frac{f_3^3}{f_3^2} + f_4 = [m] = (a+b)(a) + (b+c)(b) + (c+d)(c) + (d+a)(d)$$

$$(12) \quad \frac{فر۳}{فر۲} - \frac{فر۴}{فر۳} = م۳ + \frac{فر۴}{فر۲} \quad [م۳ = (ا + ج لا) فر۲ + ج قو لا]$$

$$(15) \quad \frac{فرما}{در لا} - \frac{فرما}{فر لا} = م + \frac{فر لا}{فر لا} = [م + (ج لا) + (و + ج قو)]$$

$$(۱۶) \quad \frac{فر۱}{فر۱لا} - \frac{فر۲}{فر۲لا} + \frac{فر۳}{فر۳لا} = \frac{فر۴}{فر۴لا} \quad [ا+ب+ج+د] = ا$$

$$(۱۷) \quad \frac{فر}{فر} + \frac{(م+ن)}{فر} = \frac{فر}{فر} + م'ن'$$

ثابت کرو کہ مساوات  $\frac{فرما}{مک} = \frac{فرما}{مک} - \frac{مسا}{مک} = \frac{کامل}{مک}$  کی

فرلا فرلا

شکل کا ہے

لا = (فو) صت + جب فو بہت

جہاں ص اور بہ دو نون مثبت ہیں (اگر گ اور ص مثبت ہیں)  
اور ص < بہ

$$(19) \quad \frac{فرا}{فرا} - \frac{م}{م} + \frac{فرا}{فرا} = \frac{فرا}{فرا} \quad \text{جب } لا$$

$$[ما = \frac{(م - ن) \text{ جب } لا + م ن \text{ جم } لا}{(م + ن)} + \dots \text{ تتم تفاعل}]$$

$$(20) \quad \frac{فرا}{فرا} - \frac{فرا}{فرا} + \frac{فرا}{فرا} = \frac{فرا}{فرا} \quad \text{جب } لا = \frac{فرا}{فرا} + \frac{فرا}{فرا} + \frac{فرا}{فرا} \quad \text{تتم تفاعل}$$

$$(21) \quad \frac{فرا}{فرا} + \frac{فرا}{فرا} = \frac{فرا}{فرا} + 1 \quad \text{جب } لا = \frac{فرا}{فرا} + \frac{فرا}{فرا} + \frac{فرا}{فرا} \quad \dots$$

$$(22) \quad \frac{فرا}{فرا} - \frac{م}{م} = \frac{فرا}{فرا} \quad \text{جم } ک لا + \text{جم } ک لا$$

$$[ما = \frac{1}{م} \text{ جم } لا + \text{جم } ک لا + \dots]$$

$$(23) \quad \text{عف} - (م) = \frac{1}{م} \text{ جم } لا + \text{جم } م لا$$

$$[ما = \frac{1}{م} \text{ جم } لا - \text{جم } م لا + \dots]$$

$$(24) \quad \text{عف} - \text{عف} - 1 = \frac{1}{م} \text{ جم } لا \quad [ما = \frac{1}{م} \text{ جم } لا + \dots]$$

$$(25) \quad \text{عف} + (م) = \frac{1}{م} \text{ جم } لا + \text{جم } م لا$$

$$[ما = \frac{1}{م} \text{ جم } لا - \frac{1}{م} \text{ جم } م لا + \dots]$$

$$(۲۶) \text{ مساوات } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + ۲\text{ن} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{ن}^۲\text{لا} = \text{ف جب پ ت سے}$$

لا اور  $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$  کی قیمتیں ذیل کی شرائط کے ماتحت دریافت کرو

$$\text{ت} = ۰ \text{ کے لئے } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = ۰ \text{ اور لا} = ۰$$

$$[\text{لا} = \frac{\text{ف}}{\text{فر}} \text{ جب } \{ \text{پ ت} - ۲\text{صہ} \} + \{ \text{پ ت} + \text{جب } ۲\text{صہ} \} \text{ ہو (ت)}]$$

$$\text{اور } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \frac{\text{ف جب صہ}}{\text{فر}} \text{ جب } \{ \text{جم (پ ت} - ۲\text{صہ}) - (\text{ن ت} - \text{جم } ۲\text{صہ}) \text{ ہو (ت)}$$

$$\text{جہاں } \sqrt{\text{پ}^۲ + \text{ن}^۲} \text{ اور صہ} = \text{مس}^۲ \left( \frac{\text{پ}}{\text{ن}} \right)$$

## امثلہ ۵

(متجانس مساواتیں)

$$(۱) \text{ لا}^۲ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{لا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - ۲ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰ \quad [\text{ما} = \text{ا} + \frac{\text{ب}}{\text{لا}} + \frac{\text{ج}}{\text{لا}^۲}]$$

$$(۲) \frac{\text{فرق}}{\text{فر}} + \frac{\text{ا}}{\text{فر}} = \frac{\text{فرق}}{\text{فر}} \quad \text{کو بطور متجانس خطی مساوات کے حل کرو}$$

$$[\text{ق} = \text{لوک} + \text{ب}]$$

$$(۳) \text{ لا}^۲ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - ۲ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰ \quad [\text{ما} = \text{ا} + \text{ب لوک لا} + \frac{\text{ج}}{\text{لا}^۳}]$$

$$(۴) \text{ لا}^۲ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - ۲ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{لا} \quad [\text{ما} = \text{ا} + \frac{\text{ب}}{\text{لا}} - \frac{\text{لا}}{۲}]$$

$$\begin{aligned}
 (۷) \quad & \text{لا}^۲ \text{فرما} + \text{لا}^۲ \text{فرما} - \text{ما} = \text{لا}^۲ \quad [\text{ما} = (\text{لا} + \frac{\text{ب}}{\text{لا}} + \frac{۱}{۸} \text{لا}^۲)] \\
 (۸) \quad & \text{لا}^۲ \text{فرما} - \frac{\text{لا}^۲ \text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{لا}^۳ = \text{ما}^۲ = \text{لا}^۲ \quad [\text{ما} = (\text{لا} + \text{ب} \text{لوک} \text{لا}) \text{لا}^۲ + \text{لا}^۳] \\
 (۹) \quad & \text{لا}^۲ \text{فرما} + \frac{\text{لا}^۲ \text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ما} \quad [\frac{\text{لا} + \text{ب} \text{لوک} \text{لا}}{\text{ما} \text{لا}} = \text{ما}] \\
 (۱۰) \quad & (\frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} - \frac{۲}{\text{فرلا}}) \text{ف} (۱۱) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [ \text{ف} (۱۱) = \frac{۱}{\text{فر}} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} + \text{ه} ] \\
 (۱۰) \quad & \text{ثابت کرو کہ } \text{ف} (\frac{\text{لا}}{\text{فرلا}}) \text{ لا}^۲ = \text{لا}^۲ \text{ف} (\frac{\text{لا}}{\text{فرلا}}) + \text{م} + ۶ \\
 (۱۱) \quad & \text{ثابت کرو کہ } \text{ف} (\frac{\text{لا}}{\text{فرلا}}) \text{ لا}^۲ \text{ لوک} \text{لا} \\
 & = \text{لا}^۲ \{ \text{ف} (\text{م}) \text{ لوک} \text{لا} + \text{ف} (\text{م}) \}
 \end{aligned}$$

## امثل ۵

بہمزاد مساواتیں

$$\begin{aligned}
 (۱) \quad & \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + ۴ \text{لا} - \text{ما} = ۰, \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + ۲ \text{لا} + ۵ \text{ما} = ۰ \\
 & [\text{ما} = (\text{ج} + \text{ب} \text{جبت}) \text{فو} \text{لا}] \\
 & \text{لا} = \frac{۱}{۴} (\text{ج} + \text{ب} \text{جبت}) + \text{ج} \text{ت} \{ \text{فو} \text{ت} \} \\
 (۲) \quad & \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = ۳ \text{لا} - \text{ما}, \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = ۳ \text{لا} + \text{ما}
 \end{aligned}$$



$$[ لا = (ا + ب ت) فو، ما = (ا - ب + ب ت) فو ]$$

$$(۳) \quad \frac{فرلا}{فرت} + لا + ما = فو، \frac{فرما}{فرت} + ما - لا = فو$$

$$[ لا = (ا + ب ت) فو + \frac{۴}{۲۵} فو - \frac{۱}{۳۶} فو،$$

$$ما = - (ا + ب + ب ت) فو + \frac{۱}{۲۵} فو + \frac{۴}{۳۶} فو ]$$

$$(۴) \quad \text{حل کرد} \quad \frac{فرلا}{فرت} = لا + لا، \frac{فرما}{فرت} = ما + لا$$

$$[ لا = \frac{ا + ب}{ت - ا}، ما = \frac{ا - ب}{ت - ا} ]$$

$$(۵) \quad \frac{فرلا}{فرت} + لا - ما = ۳، \frac{فرما}{فرت} + لا - ما = ۵$$

$$[ لا = (ا + ب ت) جم + (ا + ب ت) جب ت،$$

$$ما = \frac{۱}{۲} (ا + ب + ب ت) جم + \frac{۱}{۲} (ا - ب$$

$$+ ب ت) جب ت - ۱۲ ]$$

$$(۶) \quad \text{ثابت کرو کہ مساوات} \quad \frac{فرلا}{فرت} = لا + ه، \frac{فرما}{فرت} = ه + لا + ب، ما$$

$$\text{کے یکمے لا، ا، فو + ا، فو اور ما = م، ا، فو + م، ا، فو ہیں}$$

$$\text{جہاں م، ا، فو اور م، جبرہ مساوات م، ا + ب - م، ا = ۰ کی}$$

اصلیں ہیں

$$\text{اور ل، م، ا = ل + ه، م، ا، ل = ل + ه، م، ا}$$

$$(۷) \text{ حل کرو } \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} + \text{م}^2 = \text{م}^2 = \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} - \text{م}^2 = ۰$$

$$\text{لا} = (\text{فو}^2 \text{ جم}^2) (\text{م}^2 + \text{م}^2) + \text{ب}^2 \text{ فو}^2 \text{ جم}^2 (\text{م}^2 + \text{م}^2) + \text{ب}^2$$

$$\text{ما} = (\text{فو}^2 \text{ جب}^2) (\text{م}^2 + \text{م}^2) - \text{ب}^2 \text{ فو}^2 \text{ جب}^2 (\text{م}^2 + \text{م}^2) + \text{ب}^2$$

$$(۸) \text{ حل کرو } \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} = \text{لا} + \text{ما} = \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} = \text{ه} + \text{ب} + \text{ما}$$

$$(۹) \text{ حل کرو } \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} + \text{م}^2 = \text{لا} - \text{ن}^2 = \text{م}^2 = \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} + \text{م}^2 - \text{ن}^2 = ۰$$

$$[\text{لا} + \text{ما} = \text{جم}^2 (\text{ن}^2 + \text{ت}^2) + \text{ب}^2 (\text{ن}^2 - \text{ت}^2)]$$

$$\text{لا} - \text{ما} = \text{ب}^2 \text{ جم}^2 (\text{ن}^2 + \text{ت}^2) + \text{ب}^2 \text{ جب}^2 (\text{ن}^2 - \text{ت}^2)$$

$$(۱۰) \text{ ہمزاد مساوتوں } \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} = \text{م}^2 \text{ لا} = \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} = \text{م}^2 \text{ ما} = \text{م}^2 \text{ کے حل میں}$$

مستقلات ذیل کے شرائط سے دریافت کرو ت = ۰ کے لئے

$$\text{لا} = \text{لا} + \text{ما} = \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} = ۰, \text{ فر}^2 = \text{فر}^2 = ۰$$

$$[\text{لا} = \text{وجہ}^2 \text{ مہات}^2 = \text{ما} = \frac{\text{وجہ}^2}{\text{مہات}^2} \text{ جنہا مہات}^2]$$

ایک دور کے ذاتی امار کی شرح لی اور فراہمیت کر ہے اس کے درمیان میں گنجائش گ والا مکثفہ حامل ہے۔ اس میں برقی رو کی حرکت کی مساوات

ل فرت + ک لا = ق فرت اور ق فرت = لا ہے جہاں لا

ہرتی رو ہے اور ق کشفہ کا ہرتی بار ہے۔ خسروج کے ہرتی  
ہونے کی شرط دریافت کرو۔ [ل < ۱/۴ ک] [

حل کرو فرت = فرما، فرت = مہا اور ثابت کرو کہ مل ایسے  
(۱۲) مخروطی کو ظاہر کرتا ہے جو لمبا لا محور کے متساوی ہے۔

حل کرو فرت = فرما، فرت = مہا

اور ثابت کرو کہ مساوات کو پورا کر نیوالے نغینوں میں زائدوں کا ایک  
قبیل بھی ضروری ہے۔

حل کرو فرت = ن فرت + ف فرت = ن فرت

[لا = م + لجم (ن ت + ص) = م + ن ف ت

+ لجم (ن ت + ص) ]

حل کرو فرت = ن فرت + م لا = فرما، فرت = م لا

[لا = لجم (پ ت + ص) + لجم (پ ت + ص)

ما = لجم (پ ت + ص) + لجم (پ ت + ص) ]

جہاں پ پ = م + ن + ن

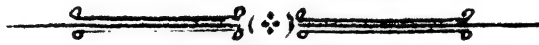
حل کرو فرت = (م + لجم (پ ت + ص) + لجم (پ ت + ص) = م

فرت = فرما + م + م = م

یہ دو ہرے رفاص کے حرکت کی مساوات ہے جس کی اوپر کی اور نیچے کی ڈوریوں کے طول بالترتیب ۱ اور ۲ ہیں اور ۱ و ۲ نیچے اور اوپر کے ذروں کی کمیتوں کی نسبت ہے۔ ثابت کرو کہ طبیعی ارتزاز کے دور  $\frac{22}{\text{پ}}$  اور  $\frac{22}{\text{پ}}$  ہونگے اگر ۱ اور ۲ مساوات

$$\text{پ} - (1 + \text{م}) \text{ج} \left( \frac{1}{\text{ب}} + \frac{1}{\text{و}} \right) \text{پ} + (1 + \text{م}) \frac{\text{ج}^2}{\text{و} \text{ب}} = 0$$

کی اصلیں ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ اس مساوات کی ۱ و ۲ میں اصلیں حقیقی، مثبت اور جداگانہ ہونگی۔





چودھواں باب  
قوتی سلسلوں کا تفرق اور میل

704

۱۷۴۔ سوال کا بیان۔ اس باب کا اصل مقصد اس امر کے ثبوت کی رہنمائی کرنا ہے کہ مناسب شرائط کے ماتحت تفرق اور تمکمل کے عمل کو ایسے تقاضوں پر استعمال کر سکتے ہیں جو قوتی سلسلوں سے بیان ہوں مثلاً اس نمونہ کے سلسلوں سے

$$(1) \quad \dots + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{2} + 1$$

جہاں سب مستقل ہیں پس اگر ص (لا) اس سلسلہ کے حامل جمع کو ظاہر کرے اور یہ فرض کر لیا جائے کہ کسی خاص وقفہ کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لئے سلسلہ مستحق ہے تو ہمیں وہ شرائط دریافت کرنا ہیں جن کے ماتحت یہ بیان کیا جاسکتا ہے کہ ص (لا) متغیر لا کا مسلسل اور قابل تفرق تفاعل ہے اور علاوہ اس کے

$$\text{ص (۱)} = ۱ + ۲ + ۳ + \dots + (n-1) + n \quad (۲)$$

اور خاص (لا) فرما =  $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}$  اس (لا) ... (۳)

اگر (۱) میں رقموں کی تعداد محدود ہوتی تو زیر غور مسئلہ کے ثبوت کی ضرورت نہ ہوتی اور جو کتاب میں اب تک بنایا جا چکا ہے (دیکھو دفعہ ۲۹ اور ۴۴) وہی کافی ہوتا۔ لیکن اس امر کو اچھی طرح خیال میں رکھنا چاہئے کہ لاپتہ سلسلوں کے متعلق اصطلاح "حاصل جمع" کے معنی کچھ مصنوعی سے ہوئے ہیں، اور بغیر تحقیق کے اس امر کو فرض کرنے کا ہمیں کوئی مجاز نہیں ہے کہ اگر ایک مسئلہ اصطلاح کے ایک معنی میں صحیح ہے تو وہ دوسرے معنی میں بھی صحیح ہوگا۔

سلسلہ (۱) کی پہلی ن رقموں کے حاصل جمع کے لئے کوئی علا اختیار کرنے سے سہولت ہوگی اس لئے ہم کہتے ہیں

$$ص (۱) = (۱) + (۱) + (۱) + \dots + (۱) + (۱) \dots (۴)$$

جو (۱) میں (۱-۱) درجے کا منطق صحیح تفاعل ہے۔ اسے ہم جزوی حاصل جمع، کینکے اور اس کی ترسیبی تعبیر، تقریبی معنی، کہلائیکا۔ ایسے منہیات کی ایک مثال شکل ۳۶ میں دی ہوئی ہے۔ نیز اگر فرض کریں کہ

$$ص (۱) = ص (۱) + ص (۱) \dots (۵)$$

تو مقدار ص (۱) کو ن رقموں کے بعد کا باقی کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ

$$ص (۱) = ص (۱) + ص (۱) + \dots + ص (۱) \dots (۶)$$

کا حاصل جمع ہے۔

مفروض کی بنیاد پر

$$ص (۱) = ص (۱) + ص (۱) \dots (۷)$$

کی انتہائی قیمت (۱) کی ایسی قیمت کے لئے جس کے لئے ابتدائی سلسلہ

سندق ہے) ص (لا) ہے، اسی سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ تو اتر  
 کا (لا) 'کا' (لا) 'کا' (لا) 'کا' (لا) 'کا' (لا) ..... (۸)  
 کی انتہائی قیمت صفر ہے۔  
 اس امر کو ملحوظ رکھنا چاہئے کہ مذکورہ بالا تمام مسائل میں ہمیں دوہری  
 انتہا سے واسطہ پڑتا ہے۔ لہذا ص (لا) کا تسلسل ثابت کر نیکی لگے  
 جبکہ لا یہ کہ ہمیں یہ دکھانا ہے کہ

نہا نہا ص (لا) = نہا نہا ص (لا) ..... (۹)  
 نیز ضابطہ (۲) اور (۳) بالترتیب اس طرح لکھے جاسکتے ہیں

فرلا [نہا ص (لا)] = نہا فرلا [ص (لا)] ..... (۱۰)

اور [نہا ص (لا)] فرلا = نہا [ص (لا)] فرلا ..... (۱۱)  
 چونکہ مشتق تفاعل 'خارج قسمت کی انتہا ہے اور محدود مکملہ حاصل جمع کی انتہا  
 ہے اس لئے (۱۰) اور (۱۱) کے جملات بھی دوہری انتہا کے تحت میں  
 آتے ہیں۔ یہ فرض نہیں کر لینا چاہئے اور نہ ہی یہ ہمیشہ درست ہوتا ہے  
 کہ نتیجہ انتہا لینے کی ترتیبوں پر منحصر نہیں ہے۔

۱۷۵۔ لوکار تہی سلسلہ کی دریافت :- ایک یا دو مثالیں

ایسی ہیں جن کی صورت میں مذکورہ بالا سوالات کا جواب بغیر کسی شکل کے  
 دیا جاسکتا ہے کیونکہ ایسی صورتوں میں ص (لا) کی شکل معلوم ہوتی ہے۔  
 اور ان سے جو نتائج مرتب ہوتے ہیں وہ بہت اہم ہیں۔  
 سلسلہ ہندیہ کے نظریہ میں سادہ تقسیم کے عمل سے ظاہر ہے کہ

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \quad (1)$$

بشرطیکہ  $t \neq -1$ ۔ فرض کرو کہ لا مثبت ہے تو (۱) سے

$$\text{لوکار } (1+t) = \int \frac{1}{1+t} dt = \int 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t} dt$$

$$= t - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{4} t^4 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + (-1)^n \int \frac{t^n}{1+t} dt \quad (2)$$

آخری رقم میں تکملہ کی قیمت بڑھ جائے گی اگر تکمل کے نسب نامہ اسکی کم سے کم قیمت یعنی ایک درج کر دیجائے۔ اسلئے تکملہ کم ہے  $\int \frac{t^n}{1+t} dt$  سو

$$\text{یعنی } \frac{t^{1+n}}{1+t} \text{ سے۔}$$

اگر لا ایک سے کم ہو یا ایک کے مساوی بھی ہو تو جیسے  $n$  بڑھتا ہے اسکی انتہا صفر ہوتی ہے۔ پس اگر لا مثبت ہو اور  $\frac{1}{n} > 0$  تو

$$\text{لوکار } (1+t) = \int \frac{1}{1+t} dt = \int 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t} dt \quad (3)$$

جہاں سلسلہ لا تناہی تک پھیلتا ہے۔

بالخصوص لا = ۱ رکھنے سے

$$\text{لوکار } 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (4)$$

اس نتیجہ سے اگرچہ صحیح جواب حاصل ہو سکتا ہے لیکن سلسلہ کے بہت آہستہ مستند ہونے کی وجہ سے یہ ضابطہ عددی حسابات کے لئے موزوں نہیں ہے، یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اعشاریہ کے  $n$  مقام تک صحیح نتیجہ نکالنے کے لئے تقریباً  $10^n$  ارقام درکار ہونگی۔ عملی طور پر زیادہ مفید ضابطہ (۱۲) ذیل میں درج ہے۔

$$\text{پہر } \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1} + \frac{t^n}{1-t} \quad (5)$$



بشرطیکہ  $t \neq 1$  پس اگر  $\Delta$  ایک سے کم مثبت مقدار ہے تو

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta^n}{1-\Delta^n} = \Delta + \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} + \dots + \frac{\Delta^n}{n} + \dots \quad (۶)$$

بائیں جانب کے سچلے کی قیمت بڑھ جاتی ہے اگر نسب  $\Delta$  کی بجائے اسکی  
کم سے کم قیمت جو تکمیل سے حدود کے اندر واقع ہوتی ہے اس میں درج  
کردیجائے یعنی نسب  $\Delta$  کی بجائے  $(1-\Delta)$  لکھ دیا جائے

پس  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\Delta)^n}{1-(1-\Delta)^n} > \frac{1}{1-\Delta} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta^n}{1-\Delta^n}$  فرت  $(1-\Delta)$   $(1+\Delta)$   $(۷)$   
چونکہ مفروض کی رو سے  $\Delta$  ایک سے کم ہے اس لئے جیسے  $\Delta$  بڑھتا ہے  
اس کی انتہا صفر ہوتی ہے۔

نیز چونکہ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta^n}{1-\Delta^n} = [-\text{لوک } (1-\Delta)] = -\text{لوک } (1-\Delta) \dots (۸)$

اس لئے لوک  $(1-\Delta) = -\Delta - \frac{\Delta^2}{2} - \frac{\Delta^3}{3} - \dots - \frac{\Delta^n}{n} - \dots$  لا انتہا تک  $(۹)$

ضابطوں (۳) اور (۹) کو ذیل کے ایک ضابطہ سے بیان کیا جاسکتا ہے

$$\text{لوک } (1+\Delta) = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \dots + \frac{\Delta^n}{n} - \dots + \frac{\Delta^n}{n} \dots (۱۰)$$

جہاں یہ ضابطہ  $\Delta$  کی  $-1$  سے  $+1$  تک کی تمام قیمتوں کے لئے برقرار رہتا ہے  
بشرطیکہ  $(-1)$  کو حدود سے خارج کر دیا جائے اور  $(+1)$  کو شریک کر لیا جائے  
بائیں جانب کا سلسلہ لوکار تہی سلسلہ کہلاتا ہے۔

اگر  $\Delta$  مثبت ہو اور ایک سے کم ہو تو (۳) میں سے (۱۰) کو تفسیق  
کرنے سے

نوٹ: ایسا معلوم ہوتا ہے کہ پہلے ہیل اس سلسلہ کو این مرکیٹر (N. Mercator)  
نے ۱۶۶۸ء میں دیا تھا

$$\text{لوگ } \frac{1}{11} + 1 = 2 \left( \frac{1}{11} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots \right) \dots \dots (11)$$

اس نتیجہ میں اگر  $\frac{1}{11} = \frac{1}{1+3+5}$  درج کریں تو

$$\text{لوگ } (1+3+5) = \text{لوگ } 9 = \text{لوگ } \frac{1}{1+3+5}$$

$$(12) \dots \dots \left\{ \dots + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \frac{1}{1+3+5+7+9} + \dots \right\}^2 =$$

یہ سلسلہ  $9 = 1$  کے لئے بھی بہت جلد مستحق ہوتا ہے۔  $9 = (1+3+5)$  رکھنے سے لوگ ۲، لوگ ۳، لوگ ۲، لوگ ۲، لوگ ۳، ... کی سلسلہ دریافت ہو سکتی ہیں، اور اس سے طبعی اعداد ۲، ۳ کے لوکارتموں کی قیمتیں اساس قو کے لحاظ سے حاصل ہو جائیں گی جب لوگ ۱۰ کی قیمت معلوم ہو جائے تو اس کا الٹ مقیاس صاف کو ظاہر کرتا ہے جس کے ساتھ ضرب دینے سے اساس قو کے لوکارتم اساس ۱۰ کے لوکارتموں میں تبدیل ہو جاتے ہیں۔

$$\text{مثال (۱) :- اگر } n < 10 \text{ تو لوگ } \frac{1}{n} = \text{لوگ } \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \dots \dots (13)$$

$$\dots \dots \dots + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n} + \dots \dots \dots$$

چونکہ از قدام یکے بعد دیگرے مثبت اور منفی ہیں اور ان کی انتہا صفر ہے اسلئے ان کا حاصل جمع دفعہ ۵ کی رو سے  $\frac{1}{n}$  سے بڑا ہوگا۔

۴۔ صاف کے دریافت کرنیکا سر بنی طریقہ ذیل کی مثالہ مساوات کے ذریعہ ہے  
 لوگ ۱۰ = ۳ لوگ ۲ + ۵ لوگ ۵

بائیں جانب کے لوکارتم مضابطہ (۱۲) میں  $9 = 1+3+5$  رکھنے سے حاصل ہو سکے ہیں

نیز لوک  $(\frac{n}{n-1}) = -$  لوک  $(1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots$  (۱۴)  
جو ظاہر ہے کہ  $\frac{1}{n}$  سے بڑا ہے

اس لئے  $\frac{1}{n} < \frac{1+n}{n}$  لوک  $\frac{1}{1+n} < \dots$  (۱۵)  
مثال ۲۔ فرض کرو کہ

(۱۶) ...  $\begin{cases} ع = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots - \text{لوک } n \\ و = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots - \text{لوک } (n+1) \end{cases}$   
جہاں  $n$  مثبت صحیح عدد ہے۔ تو (۱۵) سے

(۱۷)  $ع - و = \text{لوک } \frac{1+n}{n} - \frac{1}{1+n} < 0$

اور  $و - و = \frac{1}{1+n} - \text{لوک } \frac{2+n}{1+n} < 0$  (۱۸)

نیز  $ع - و = \text{لوک } \frac{1+n}{n}$  (۱۹)  
جس کی قیمت صفر اور  $\frac{1}{n}$  کے درمیان واقع ہے۔

اس لئے تقادیر  $ع' ع'' ع''' \dots ع_n \dots$  (۲۰)  
ایک مسلسل گھٹنے والا سلسلہ بناتی ہیں

اور  $و' و'' و''' \dots و_n \dots$  (۲۱)

ایک بڑھنے والے سلسلے کو ظاہر کرتی ہیں۔ نیز چونکہ (۲۰) کا ہر رکن ضابطہ (۱۹) کے مطابق (۲۱) کے مائل رکن سے بڑا ہے اس لئے سلسلہ (۲۰) کسی ایک پختی انتہا ہے (دفعہ ۲) اور سلسلہ (۲۱) کی ایک اوپر کی انتہا ہے۔

نیز چونکہ  $\sum_{n=1}^{\infty} (ع - و) = 0$  ..... (۲۲)

اس لئے یہ دونوں انتہائیں مساوی ہیں۔ پس

نہا  $\sum_{n=1}^{\infty} (۱ + \frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} + \dots + \frac{1}{n} - \text{لوگ } n) = \text{جما} \dots (۲۳)$

جہاں جما کی ایک خاص مستقل قیمت ہے اور یہ یور کا مستقل کہلاتا ہے۔  
نیز  $۱ = ۱ - \text{لوگ } ۲ < ۰$ ۔ اس لئے جما مثبت ہے۔ اس کی قیمت  
..... ۵۵۷۷۲۱۵۶۶ در یافت ہوئی ہے۔

۱۷۶۔ گرگوری کا سلسلہ۔

چونکہ  $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$  (۱)۔

اس لئے  $\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + (-1)^n \frac{1}{2n+1}$

+  $\int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t} dt$  (۲)۔

اگر لا مثبت ہے اور  $\frac{1}{1+t}$  تو آخر الذکر تکملہ  $\int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t} dt$  فرت یعنی  $\frac{1}{2n+1}$  (۳)۔  
سے کم ہے اور اس لئے جیسے  $n$  بڑھتا ہے یہ صفر کی طرف مائل ہوتا ہے۔

پس  $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + (-1)^n \frac{1}{2n+1}$  (۴)۔

ایس مسن الا کی وہ قیمت لینی جائے جو لا کے ساتھ صفر سے شروع ہوتی ہے۔  
یہ سلسلہ گرگوری کا سلسلہ کہلاتا ہے۔ نیز چونکہ (۴) کے دونوں جانب کی

اس کے دریافت کرنے کا طریقہ اس کتاب کی حدود سے باہر ہے  
اسکے دریافت کنندہ گرگوری (۱۶۷۱ء) کے نام کی بنا پر۔

علامت لا کے ساتھ بدلتی ہے اس لئے مساوات لا کی۔ اسے + انگ (دونوں حدود شریک ہیں) کی تمام قیمتوں کے لئے صحیح لگتی ہے۔

$$\text{لا} = ۱ \text{ کہنے سے } \frac{\pi}{۴} = ۱ - \frac{1}{۳} + \frac{1}{۵} - \frac{1}{۷} + \frac{1}{۹} - \dots + \frac{1}{۵} - \frac{1}{۷} + \frac{1}{۹} - \dots \quad (۵)$$

سلسلہ بہت آہستہ مستقر ہوتا ہے اسلئے  $\pi$  کی قیمت دریافت کرنے کے لئے دیگر سلسلے استعمال کئے جاتے ہیں۔ یولر نے ذیل کی مساوات مطابق استعمال کی

$$\frac{\pi}{۴} = \text{مس}^۱ \frac{1}{۳} + \text{مس}^۱ \frac{1}{۳} - \dots \quad (۶)$$

$$\text{جس سے } \frac{\pi}{۴} = \left( \dots - \frac{1}{۵ \times ۳} + \frac{1}{۳ \times ۳} - \frac{1}{۳} \right) + \left( \dots - \frac{1}{۵ \times ۳} + \frac{1}{۳ \times ۳} - \frac{1}{۳} \right) = \frac{\pi}{۴} \quad (۷)$$

اس سے بیشتر میخین (Machin) نے ضابطہ

$$\frac{\pi}{۴} = \text{مس}^۴ \frac{1}{۲۳۹} - \text{مس}^۱ \frac{1}{۲۳۹} - \dots \quad (۸)$$

استعمال کیا تھا۔ (۶) اور (۸) کا ثبوت علم مثلث کی اکثر ابتدائی کتابوں میں دیا جاتا ہے۔

$$(۹) \text{ سے } \frac{\pi}{۴} = \left( \dots - \frac{1}{۵ \times ۳} + \frac{1}{۳ \times ۳} - \frac{1}{۳} \right) - \left( \dots - \frac{1}{۵ \times ۳} + \frac{1}{۳ \times ۳} - \frac{1}{۳} \right) = \frac{\pi}{۴}$$

مسئلہ کی اہمیت کی وجہ سے یہ مناسب ہو گا کہ میخین کے ضابطہ سے  $\pi$  کی قیمت دریافت کرنے کا عمل توضیح کے ساتھ دیا جائے۔ مس<sup>۱</sup>  $\frac{1}{۵}$  دریافت کرنے کے لئے ہم پہلے ذیل کی جدول بناتے ہیں۔

ن	$\frac{1}{۵}$	$\pm \frac{1}{۵ \times ۵}$
۱	۲۰۰۰۰۰۰۰۰۰	+
۳	۸۰۰۰۰۰۰۰۰۰	-
۵	۳۲۰۰۰۰۰۰۰۰	+
۷	۱۲۸۰۰۰۰۰۰۰	-
۹	۵۱۲۰۰۰۰۰۰۰	+
۱۱	۲۰۵۰۰۰۰۰۰۰	-
۱۲	۸۰۰۰۰۰۰۰۰۰	+

۴۶۳

-4

ۛۛ

$\frac{1}{\omega_{\text{res}} \times \omega} \pm$	$\frac{1}{\omega_{\text{res}}}$	$\omega$
$5 \dots 31631 \dots 3 +$ $233 -$	$5 \dots 31631 \dots 3$ $232$	$1$ $3$

اس لئے مستر =  $\frac{1}{239} = 0.0041840670$

پس  $\frac{1}{229} \text{ س} - \frac{1}{6} \text{ س} = \frac{\pi}{2}$

5 < ^ 9 0 ^ r r w 9 r + =

5. 0. 7 1 1 7 - 6 7 -

$$5610491444 =$$

$$35121092402^{\wedge} = \pi \therefore$$

ظاہر ہے کہ اعشاریہ کے آخری مقام میں خطا ہو سکتی ہے۔ آخری نتیجہ میں خطا کا اندازہ کر نیکے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ مس ۱/۲ کی دریافت میں پانچ جگہ خطا کا امکان ہے لیکن ہر جگہ اعشاریہ کے آخری مقام میں خطا

نصف اکائی سے بڑی نہیں ہو سکتی اور اسی طرح مسئلہ ۱ میں ایسی

خطا دیکھ سکتی ہے۔ پس  $n$  کی دریافت شدہ قیمت میں اگر تمام خطائیں جمع بھی ہو جائیں تو یہ اعداد کے آخری مقام میں  $(2 \times 2 \times 5 \times 5) +$

$+\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3} \times 2 = 2\frac{2}{3}$  سے زیادہ نہیں ہو سکتیں۔ اس لئے اس کا اعشاریہ کے پہلے سات مقام تک اثر نہیں پڑے گا۔ نیز ہم کہہ سکتے ہیں کہ اعشاریہ کے آخری تین عدد ۴۸۴ اور ۵۷۲ کے درمیان واقع ہونگے۔  
درحقیقت خطائیں سب ایک سمت میں نہیں ہیں اور  $\pi$  کی صحیح قیمت اعشاریہ کے دس مقامات تک یہ ہے

$$3.14159265358979 = \pi$$

۱۷۷۔ قوتی سلسلوں کا استدقاق۔ دفعہ ۴، میں

جو عام سوال پیش کئے گئے ہیں ان کو بحث میں لانے سے پیشتر استدقاق پر غور کرنا ضروری ہے۔ اگر کسی لا انتہا سلسلے کی قیمتیں متغیر لا کے فقال ہوں تو یہ ممکن ہے کہ کوئی سلسلہ لا کی تمام قیمتوں کے لئے بغیر کسی رکاوٹ کے مستند ہو جیسا کہ قوت غائی سلسلہ کی صورت میں دیکھا گیا ہے (دفعہ ۳) یا یہ سلسلہ لا کی صرف ان قیمتوں کے لئے مستند ہو جو ایک خاص مسلسل وسعت کے ساتھ تعلق رکھتی ہیں۔ اگر یہ احاطہ یا وسعت لا = ۱ سے لا = ب تک بشمول ہر دو حدود ہو تو احاطہ بند کہلاتا ہے اور اسے [۱، ب) سے ظاہر کرتے ہیں۔ اگر دونوں حدود کے نقطے ۱ اور ب احاطہ سے باہر ہوں تو احاطہ دونوں سروں پر کھلا کہلاتا ہے اور اسے [۱، ب) سے ظاہر کرتے ہیں، اگر صرف پہلے یا دوسرے حدودی نقطہ کو احاطہ سے خارج کر دیا گیا ہے تو اسے بالترتیب [۱، ب) یا (۱، ب) سے ظاہر کرتے ہیں۔ مثلاً لو کارٹھی سلسلہ احاطہ [۱، ۱) کے لئے مستند ثابت کیا گیا ہے اور گرگوری کا سلسلہ احاطہ (۱، ۱) میں مستند ہے۔

قوتی سلسلہ  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$  (۱)

کی صورت میں استدقاق کی عموماً مفید ترین جانچ ٹنہنتی جانچ ہے۔

[یہ ترقیم پروفیسر ایف ایس کیسری نے رائج کی۔]

ظاہر ہے کہ اگر ارقام کی محدود تعداد کے بعد ہر رقم اور اسکی پہلی رقم کی نسبت کی مطلق قیمت کسی مقدار ک سے کم ہے جو خود ایک سے کم ہے تو سلسلہ لازماً مستحق ہوگا۔ کیونکہ ایسی صورت میں سلسلہ کی متواتر قیمتیں، مشترک نسبت ک والے ہندسی سلسلہ کی قیمتوں کی بنسبت زیادہ تیزی سے گھٹتی ہیں۔ بالخصوص سلسلہ (۱) لازماً مستحق ہوگا اگر

$$\uparrow \quad \text{نہا} \quad | \quad \frac{1+n}{n} \quad | \quad لا \quad | \quad > 1 \quad \dots \dots \dots (۲)$$

کیونکہ اگر یہ شرط پوری ہوتی ہے اور زیر غور انتہا ک ہے تو ن کو کافی بڑا لینے سے ہم اطمینان کر سکتے ہیں کہ ن کی اس اور اس سے بڑی قیمتوں کے لئے کسر  $\frac{1+n}{n}$  لا کسی مقررہ مقدار ک سے (جو ک اور ایک کے درمیان ہے) کم ہے۔  
اگر شرط (۲) پوری ہوتی ہے تو سلسلے

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n-1} \dots \dots \dots (۳)$$

اور  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \dots \dots (۴)$   
جنکی ارقام سلسلہ (۱) کو بالترتیب تفریق اور بحمل کرنے سے حاصل ہوئی ہیں لازماً مستحق ہونگے۔ کیونکہ (۳) کی صورت میں

$$\text{نہا} \quad | \quad \frac{(1+n)(1+n)}{n} \quad | \quad لا = \text{نہا} \quad | \quad \frac{1}{n} \quad | \quad (1 + \frac{1}{n}) \quad | \quad \text{نہا} \quad | \quad \frac{1+n}{n} \quad | \quad لا = \text{ک۔ب۔} \quad (۵)$$

♣ جانکی کی یہ شکل ڈی لا مبرٹ کے نام سے مشہور ہے





(۳) کی صورت میں

$$\frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} \times \frac{\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

(9) . . . . .

بائیں جانب کی دو انتہاؤں میں سے پہلی مفروض کی رو سے صفر ہے اور دوسری دفعہ ۴۴ (۳) کی بنیاد پر صفر ہے۔

(۴) کی صورت میں بدرجہ اولیٰ

$$(10) \quad \frac{1}{1+n} = \frac{1}{1+n} \left| \frac{1}{1+n} \right| = \frac{1}{1+n} \left| \frac{1}{1+n} \right|$$

مثال (۱) سلسلہ  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots$  (۱)

دفعہ (۵) سے لاکھ ۱ کے لئے مستحق ہے۔ اس لئے الا الا کے لئے  
یہ لازماً مستحق ہے۔

ثابت کیا جا سکتا ہے کہ  $\lambda = 1$  کے لئے متسع ہے۔ پس یہ احاطہ  
(-1, 1) میں مستحق ہے لیکن لازمًا مستحق صرف احاطہ  $[-1, 1]$  میں ہے۔

مثال (۲) - سلسلہ  $\frac{1}{1 \times 1} + \frac{1}{2 \times 2} + \frac{1}{3 \times 3} + \dots$  (۱۲)

جانچ (۲) کی رو سے  $1 \neq 1$  کے لئے مستحق ہے۔ نیز آسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ  $1 \neq 1$  کے لئے یہ مستحق ہے۔ اس لئے یہ پورے احاطے (۱۰۱) میں مستحق ہے۔ لیکن مذکورہ بالا دلائل کی بنیاد پر ہم صرف اس بات کا دعویٰ کر سکتے ہیں کہ سلسلہ

$$(13) \dots\dots\dots + \frac{y^2}{x} + \frac{y^2}{y} + y$$

جو سلسلہ (۱۳) کو رقم بہ رقم تفریق کرنے سے ماہل ہوتا ہے احاطہ [-۱۱] میں مستحق ہے۔ نیز دفعہ ۱ سے یہ سلسلہ لا۔ = ا کے لئے مستحق ہے اور دفعہ ۱ سے

۱۷۸۔ قوتی سلسلوں کا تسلسل :- اب فرض کرو کہ سلسلہ

$$\text{ص (لا)} = \text{ل}^1 + \text{ل}^2 + \text{ل}^3 + \dots + \text{ل}^n + \dots \quad (1)$$

احاطہ [۔ عمدہ] میں لازماً مستند ہے۔ اگر لا اور لا اِس احاطہ کے کوئی دو نقاط ہوں تو دفعہ ۵ (آ) اور (۴) سے

$$ص(\bar{A}) - ص(A) = (\bar{A}) - (A) = \{(\bar{A}) + 1\} - \{A + 1\} = \frac{(\bar{A}) + 1 - A - 1}{3} = \frac{(\bar{A}) - A}{3}$$
$$(2) \dots \left\{ \dots + \frac{1-\alpha_1}{\alpha_1} + \dots + \frac{1-\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}} + \frac{1-\alpha_n}{\alpha_n} \right\} \alpha_n$$

اگر لا اور لا کی علامت ایک ہی ہوتی کسر

۱-۱ اور ۱-۲ کے درمیان واقع ہوگی۔ اس لئے خطوط

وحدانی کے اندر کی مختلف رقمیں مطلق قیمت میں ذیل کے دو سلسلوں کی متناظر رقموں کے درمیان واقع ہوئی:-

$$r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n + \dots + r_{(3)}$$

اور  $1 + {}^1P_1 + {}^2P_2 + \dots + {}^{n-1}P_{n-1} + {}^nP_n = (n+1)P_n$ ۔۔۔۔۔ (۴)

ثابت کر دیا گیا ہے کہ مذکورہ بالا مفروضہ سیر یہ دونوں سلسلے  
لازمًا مستحق ہیں۔ اسلئے (۲) میں { } کے درمیان کا جملہ محدود ہے پس

نہیں {ص (لا) - ص (لا)} = (۵)

یعنی احاطہ [۔ عما، عما] میں لا کی تمام درمیانی قیمتوں کے لئے  
 (۱) سلسلہ ہے۔  
 اس سے یہ اخذ کر سکتے ہیں کہ قوتی سلسلے (۳) اور (۴) احاطہ  
 [۔ عما، عما] میں مسلسل ہیں۔

۴۶۷۔ قوتی سلسلہ کا تفرق:۔ گذشتہ دفعہ کی ترقیم کے

مطابق اور اسی مفروضہ کی بنا پر

$$\begin{aligned} \text{ص (لا) - ص (لا)} &= \frac{\text{ص (لا)}}{\text{لا - لا}} = \frac{\text{ص (لا)}}{\text{لا - لا}} \\ &= \frac{\text{ص (لا)}}{\text{لا - لا}} = \frac{\text{ص (لا)}}{\text{لا - لا}} \\ &= \frac{\text{ص (لا)}}{\text{لا - لا}} = \frac{\text{ص (لا)}}{\text{لا - لا}} \end{aligned}$$

چونکہ آخر میں لا کو لا کے مساوی کرنا ہے اس لئے ان دونوں کو ہم علامت  
 فرض کر سکتے ہیں۔

سب سے پہلے فرض کرو کہ تمام سر ل<sup>ن</sup> مثبت ہیں اور لا بھی مثبت  
 ہے۔ تو (۱) کے بائیں جانب کا سلسلہ قیمت کے لحاظ سے گذشتہ  
 دفعہ کے سلسلوں (۳) اور (۴) کے درمیان واقع ہو گا اور چونکہ (۳) کا حاصل  
 جمع لا کا مسلسل تفاعل ہے اس لئے

$$\begin{aligned} \text{ص (لا) - ص (لا)} &= \frac{\text{ص (لا)}}{\text{لا - لا}} = \frac{\text{ص (لا)}}{\text{لا - لا}} \\ &= \frac{\text{ص (لا)}}{\text{لا - لا}} = \frac{\text{ص (لا)}}{\text{لا - لا}} \\ &= \frac{\text{ص (لا)}}{\text{لا - لا}} = \frac{\text{ص (لا)}}{\text{لا - لا}} \end{aligned}$$

\* ممکن ہے کہ سلسلے (۱) اور (۲) لازماً متفق ہوں جبکہ لا سلسلہ (۱) کے احاطہ  
 استقامت کا حدودی نقطہ ہو۔ ایسی صورت میں ہم یقینی طور پر بیان کر سکتے ہیں  
 کہ ص (لا) لا کی اس قیمت تک (بشمول اس قیمت کے) مسلسل ہے۔

اور یہ نتیجہ احاطہ [عہدہ] کے تمام نقاط کے لئے صحیح ہے۔  
 ظاہر ہے کہ یہی نتیجہ حاصل ہو گا اگر تمام سر لائن منفی ہوں۔  
 اب فرض کرو کہ لا منفی ہے اور سر لائن مثبت ہیں اس صورت میں  
 ص (لا) میں ایک ایک رقم چھوڑ کر جو دو ذیل کے سلسلے بنتے ہیں  
 ان پر مذکورہ بالا دلائل عائد ہو سکتے ہیں

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots + 1 + 2 + 3 + \dots + n \quad (3)$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots + 1 + 2 + 3 + \dots + n \quad (4)$$

کیونکہ (۲) کی تمام رقمیں مثبت ہیں اور (۴) کی منفی۔ اب ان کا مشتق تفاعل  
 ان سلسلوں کو بالترتیب رقم - رقم تفرق کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے  
 پس ان کو جمع کرنے سے ضابطہ (۲) حاصل ہو گا کیونکہ ہر دو سلسلے لازماً  
 مستحق ہیں۔

آخر الامر اگر سر لائن تمام ایک ہی علامت کے نہیں ہیں تو ص (لا)  
 کو دو ایسے سلسلوں کے ماقبل جمع میں تحویل کیا جاسکتا ہے کہ ان میں  
 سے ایک کے تمام سر مثبت ہوں اور دوسرے کے منفی۔ اب مذکورہ بالا  
 دلائل ان میں سے ہر ایک پر عائد ہو سکتے ہیں اور اس لئے ان کے  
 مجموعے پر بھی عائد ہو سکتے ہیں۔

اوپر کے بیان میں اس امر کا مشاہدہ کرنا ہو گا کہ زیر غور سلسلہ کا لازماً  
 مستحق ہونا اوپر کے استدلال کے لئے بیک ضروری ہے۔

۶۶۸

مثال :- یہ معلوم ہے کہ  $1 > 1$  کے لئے

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots + 1 + 2 + 3 + \dots + n \quad (5)$$

دونوں جانبوں کو تفرق کرنے سے

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots + 1 + 2 + 3 + \dots + n \quad (6)$$

نیز دوبارہ تفرق کرنے سے

$$(۷) \dots + \frac{1}{2} = \frac{1}{3(۵-۱)}$$

۱۸۰۔ قوتی سلسلوں کا مکمل :- دفعات ۱۷، ۱۸، ۱۹ کی ترقیم کے موافق فرض کر دو کہ

$$(۱) \dots + \frac{1}{۱+۵} = \frac{1}{۳}$$

اس مفروضہ کی بنیاد پر کہ ص (۱) احاطہ [ ص، ص ] میں لازماً ہے سلسلہ (۱) بھی اسی احاطہ میں لازماً مستند ہوگا۔ پس دفعہ ۹، اکی رو

$$(۲) \dots + \frac{1}{۱+۵} = \frac{1}{۳}$$

$$(۳) \dots + \frac{1}{۱+۵} = \frac{1}{۳}$$

مثال (۱) اگر  $۱ > ۱$  تو مسئلہ تنائی (دفعہ ۱۸) سے

$$(۴) \dots + \frac{1}{۱+۵} = \frac{1}{۳}$$

پس حدود و سفر اور لڑکے درمیان رقم بہ رقم تکمیل کرنے سے

$$(۵) \dots + \frac{1}{۱+۵} = \frac{1}{۳}$$

یہ سلسلہ نیوٹن کا دریافت کیا ہوا ہے۔  
اس میں اگر  $\frac{1}{۱+۵} = \frac{1}{۳}$  رکھیں تو

$$(۶) \dots + \frac{1}{۱+۵} = \frac{1}{۳}$$

جس سے  $\pi$  کی قیمت بہ آسانی دریافت ہو سکتی ہے۔

مثال (۲)۔ اگر  $|a| > |a+1|$  تو لوگ  $(a+1) = (a) - \frac{(a)}{2} + \frac{(a)}{4} - \frac{(a)}{8} + \dots$  (۶)

۴۶۹ اسکو حدود صغرا اور لا کے درمیان رقم بہ رقم تحمل کرنے سے

$$(a+1) \text{ لوگ } (a+1) - (a) = (a) - \frac{(a)}{2 \times 1} + \frac{(a)}{2 \times 2} - \frac{(a)}{2 \times 3} + \dots \dots \dots (۸)$$

دفعہ ۸، ا کے مابین یہ دکھایا گیا ہے کہ بائیں جانب کا تفاعل  $(a) = 1$  تک سلسل ہے۔ اس سے نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$538629 \dots = 1 - 2 \text{ لوگ } 2 = \dots \dots \dots \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 2} - \frac{1}{2 \times 1}$$

۱۸۱۔ تفرقی مساوات کا حل سلسلوں کے ذریعہ۔

اگر کوئی تفرقی مساوات دی ہوئی ہو جس کے سر متبوع متغیر  $(a)$  کے منطق صحیح تفاعل ہوں تو صعودی قوی سلسلہ

$$a = (a) + (a) + (a) + \dots \dots \dots + (a) + \dots \dots \dots (۱)$$

کی شکل میں اکثر حل دریافت ہو سکتا ہے۔ اب اگر تھوڑی دیر کے لئے فرض کر لیا جائے کہ  $a$  کے کسی خاص احاطہ میں سلسلہ لازماً مستقر ہے تو دفعہ ۹، ا کے مضابطہ سے یہ  $a$  کے لحاظ سے ایک، دو، ... یا زیادہ دفعہ تفرق کیا جاسکتا ہے۔ تفرقی مساوات میں سلسلہ درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ مساوات پوری ہو سکتی ہے بشرطیکہ سروں  $(a), (a), (a), \dots$  میں چند رشتے ہوں۔

اس طریقے پر ایک یا زیادہ اختیاری مستقل والا سلسلہ حاصل ہو جائے اور اگر یہ ثابت ہو جائے کہ سلسلہ لازماً مستقر ہے تو یہ اس تفرقی مساوات کا ایک حل ہو گا۔ بلاشبہ یہ الگ سوال ہے کہ آیا یہ حل مکمل حل ہے یا مکمل حل بنانے کے لئے اس میں کچھ اور اضافہ ہونا چاہئے

اس پر بھی غور کرنا باقی ہے۔  
ذیل کی مثال اہم ہے

فرض کرو کہ مساوات ہے  $\frac{فرما}{(۲)} + م = ۰$  ..... (۲)  
نمونہ (۱) کامل مگر مساوات میں اندراج سے مائل ہوتا ہے

$$..... + (۱ \times ۲ + ۱) + (۲ \times ۳ + ۱) + (۳ \times ۴ + ۱) + (۴ \times ۵ + ۱) + \dots$$

(۳)  $\{ (۱-n) \cdot n \cdot (۱-n) + \dots + ۰ \}$   
یہ مساوات متکلاً پوری ہوتی ہے بشرطیکہ

$$۱ - \frac{۱}{۲ \times ۱} = \frac{۱}{۳ \times ۲} - ۱$$

$$۱ - \frac{۱}{۴ \times ۳} = \frac{۱}{۵ \times ۴} - ۱, \quad ۱ - \frac{۱}{۵ \times ۴} = \frac{۱}{۶ \times ۵} - ۱$$

اور عام طور پر

$$(۴) \dots \left\{ \begin{array}{l} ۱ - \frac{۱}{۲ \times (۱-n)} = \frac{۱}{۲ \times (۱-n)} - ۱ \\ \text{اور } ۱ - \frac{۱}{۲ \times (۱+n)} = \frac{۱}{۲ \times (۱+n)} - ۱ \end{array} \right.$$

پس مائل ہوتا ہے کہ حل ہے

$$م = ۱ - \left( \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \dots \right) + \left( \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \dots \right) - \left( \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \dots \right) + \dots$$

برآسانی ثابت کیا جاسکتا ہے کہ خطوط عددانی میں کے سلسلے لاکھ تمام قیمتوں کے لئے لازماً مستحق ہیں اور اس لئے ان کا حاصل جمع مسلسل ہے۔

دفعہ ۱۶۳ میں دکھایا گیا ہے کہ (۲) کا مکمل حل ہے



ما = اجم لا + جب لا ..... (۶)  
 پس اگر ل اور ل کی قیمتیں دی ہوئی ہوں تو ل اور جب کی ایسی قیمتیں دریافت ہو سکتی ہیں کہ جملے (۵) اور (۶) متجانسا مساوی ہوں۔  
 مثلاً ل = ۱ اور ل = ۱۔ درج کرو

تو  $1 - \frac{لا^۲}{۲} + \frac{لا^۳}{۳} - \frac{لا^۴}{۴} + \dots = اجم لا + جب لا$   
 لا کی علامت بدلتے سے

$1 - \frac{لا^۲}{۲} + \frac{لا^۳}{۳} - \frac{لا^۴}{۴} + \dots = اجم لا - جب لا$   
 پس ضروری ہے کہ جب = ۰، اب لا = ۰۔ رکھنے سے ل = ۱ دریافت ہوتا ہے۔

اس سے ذیل کا ضابطہ حاصل ہوتا ہے

جم لا =  $1 - \frac{لا^۲}{۲} + \frac{لا^۳}{۳} - \frac{لا^۴}{۴} + \dots$  ..... (۷)

اسی طرح اگر ل = ۰ اور ل = ۱ رکھیں تو حاصل ہوتا ہے

ل = ۰ اور جب = ۱

اور اسلئے جب لا =  $1 - \frac{لا^۲}{۲} + \frac{لا^۳}{۳} - \frac{لا^۴}{۴} + \dots$  ..... (۸)

کئی وجوہات سے تفرقی مساوات کے حل کرنے کا طریقہ بالا عملی طور پر کارآمد نہیں ہے، اور یہ بھی ممکن ہے کہ اس سے نامکمل حل حاصل ہو۔  
 مثلاً دوسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات کی صورت میں ممکن ہے کہ صرف ایک ہی سلسلہ حاصل ہو اور اسلئے ایک ہی اختیاری مستقل ہو۔  
 اس مضمون کے طبعی اطلاقیات میں اکثر ایسا ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں حل کم از کم علامات کی رقوم میں دفعہ ۱۶۶ (۳) کے طریقے سے مکمل

کیا جاسکتا ہے  
۱۸۲۔ تفرقی مساوات کی مدد سے پھیلاؤ:-

بعض اوقات گذشتہ دفعہ کا طریقہ ایک دے ہوئے تفاعل کو  
قوتی سلسلہ میں پھیلانے کے لئے استعمال ہو سکتا ہے بشرطیکہ ایسی  
مساوات مرتب ہو سکے جس کے سرمنطبق صحیح تفاعل ہوں اور جو اصلی  
تفاعل کے اندراج سے پوری ہو جائے۔

مثلاً فرض کرو کہ  $M = (A + B)^2$  ..... (۱)  
جہاں  $M$  مثبت منفی صحیح عدد یا کسر ہے۔ دونوں جانب کا لوکار نم  
لیکھ تفرق کرنے سے

$$\frac{M}{A+B} = \frac{A}{A+B} + \frac{B}{A+B}$$

یعنی  $(A+B) \frac{M}{A+B} = M = A + B$  ..... (۲)  
اب فرض کرو کہ

$M = A + B + C + D + E + \dots + N$  ..... (۳)  
اس کو مساوات میں درج کرنے سے

$$(A+B)(A+B+C+D+E+\dots+N) = A^2 + AB + AC + AD + AE + \dots + AN$$

$$- M = (A+B+C+D+E+\dots+N) - A^2$$

\* یہ طریقہ ابتدا میں نیوٹن نے استعمال کیا تھا نیز جیمز (لا) کے سلسلے  
بھی اسی نے حاصل کئے تھے اگرچہ سلسلے حاصل کرنے کا طریقہ مختلف تھا

$$\text{یا } (1 - m) + (1 - m) + \dots + (1 - m) + \dots$$

$$+ \{ (1 - m) + (1 - m) + \dots + (1 - m) + \dots \} \quad (۴)$$

یہ متلا پوری ہوتی ہے بشرطیکہ

$$1 - m = 1$$

$$1 - m = 1 \quad \frac{1 - m}{2} = 1$$

$$1 - m = 1 \quad \frac{1 - m}{3} = 1$$

اور عام طور پر

$$(۵) \quad 1 - m = 1 \quad \frac{1 - m}{n} = 1$$

اس سے حاصل ہوتا ہے

$$1 - m = 1 \quad \frac{1 - m}{n} = 1$$

$$(۶) \quad 1 - m = 1 \quad \frac{1 - m}{n} = 1$$

جو مساوات (۲) کا حل ہے۔ یہ آسانی تصدیق ہو سکتی ہے کہ سلسلہ  
الا > ۱ کے لئے مستحق ہے۔

اب اگر تفرقی مساوات (۲) کے مرتب کرنے کے طریقے کو الٹیں تو  
ظاہر ہے کہ اس کا مکمل حل ہے

$$(۷) \quad 1 - m = 1 \quad \frac{1 - m}{n} = 1$$



$$یا (۱-۱) + (۱-۲) + (۱-۳) + (۱-۴) + \dots$$

$$+ \{ (۱-۱) - (۱-۲) + (۱-۳) - (۱-۴) + \dots \} \quad (۱۳)$$

یہ مساوات متناظر پوری ہوگی بشرطیکہ

$$(۱۴) \dots \left\{ \begin{array}{ll} ۱ = ۱ & ۱ = ۱ \\ ۱ = ۱ & ۱ = ۱ \\ \frac{۳ \times ۱}{۲ \times ۲} = \frac{۳}{۲} = \frac{۳}{۲} & \frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۳} \\ \frac{۵ \times ۳ \times ۱}{۴ \times ۳ \times ۲} = \frac{۵}{۴} = \frac{۵}{۴} & \frac{۲ \times ۲}{۵ \times ۳} = \frac{۲}{۵} = \frac{۲}{۵} \end{array} \right.$$

اس سے یہ مل حاصل ہوتا ہے

$$= ۱ + \frac{۲}{۳} + \frac{۲ \times ۲}{۵ \times ۳} + \frac{۵}{۴ \times ۳ \times ۲} + \dots$$

$$+ (۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۳ \times ۱}{۲ \times ۲} + \frac{۵ \times ۳ \times ۱}{۴ \times ۳ \times ۲} + \dots) \quad (۱۵)$$

اب اگر ہم غلطی مساوات (۱۰) کے بنانے کے عمل کو الٹیں تو ظاہر ہے کہ اس کا عام مل ہوگا

$$۱ - ۱ = ۰ = ۱ + ۱ + \dots \quad (۱۶)$$

$$یا ۱ - ۱ = ۰ = \frac{۱}{۱-۱} + \frac{۱}{۱-۱} + \dots \quad (۱۷)$$

سوال کی نوعیت سے اس امر کا پتہ چلتا ہے کہ (۱۵) کو منتخب (۱۷) میں شامل ہونا چاہئے۔ اگر (۱۵) اور (۱۷) میں  $۰ = ۰$

رکھیں تو حاصل ہوتا ہے  $1 = 1$  اب  $1$  کے لئے جو دو جملے ہیں ان کے  
مقاماً مساوی ہونے کے لئے ضروری ہے کہ

$$\text{جب } 1 = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \dots + \frac{1}{5 \times 3} + \frac{2}{3} + 1 \dots (18)$$

$$\text{اور } \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \dots + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{2}{2} + 1 \dots (19)$$

دونوں سلسلے مستند ہیں جبکہ  $|1| > |1|$  نتیجہ (۱۹) صرف (۱۸) کی آکاشانی  
پھیلاؤ ہے اب اگر  $1 =$  جب  $1$  رکھیں تو پہلا سلسلہ ذیل کی شکل میں لکھا  
جاسکتا ہے

$$1 = \text{جب } 1 \text{ جم } 1 + \frac{2}{3} \text{ جب } 1 + \frac{1}{5 \times 3} \text{ جب } 1 + \dots (20)$$

نیز اگر اس میں  $1 =$  ہی درج کریں تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس } 1 = \frac{1}{1+1} \left\{ \dots + \frac{1}{5 \times 3} + \frac{2}{3} + 1 \right\} \dots (21)$$

سلسلہ  $1$  کی قیمت دریافت کرنے کے لئے کئی عمدہ طریقوں کی بنیاد  
مثلاً یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

$$\frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\text{جس سے } \frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{5 \times 3} + \frac{2}{3} + 1 \dots$$

$$\dots + \frac{1}{1 \dots} + \frac{1}{5 \times 3} + \frac{2}{3} + 1 \dots (22)$$

یہ سلسلہ بہت جلد مستند ہوتا ہے۔ اسکے علاوہ نسب نامیں۔ اکی قوتیں  
ہونے کی وجہ سے عددی حسابات کے لئے بہت موزوں ہے۔



$$۶۰۱۲۴۲۲۵۲۰۰ = \dots - \frac{1}{۸۰ \times ۳} + \frac{1}{۸۰ \times ۲} - \frac{1}{۸۰} = ج$$

(Adams) اسکی مد سے لوک ۱۰ دریافت کرو۔

$$(۴) \text{ ثابت کرو کہ } ۲ = ۷ + ۵ + ۳ + ۱$$

$$\text{لوک } ۳ = ۱۱ + ۸ + ۵ + ۱$$

$$\text{لوک } ۵ = ۱۷ + ۱۲ + ۷ + ۱$$

$$\text{لوک } ۱۰ = ۲۳ + ۱۷ + ۱۱ + ۱$$

$$۶۰۴۴۵۳۸۵۲۱۱ = (\dots + \frac{1}{۳۱ \times ۵} + \frac{1}{۳۱ \times ۳} + \frac{1}{۳۱})^۲ = جہاں چپ$$

$$۶۰۴۰۸۲۱۹۹۴۵ = (\dots + \frac{1}{۴۹ \times ۵} + \frac{1}{۴۹ \times ۳} + \frac{1}{۴۹})^۲ = ق$$

$$۶۰۱۲۴۲۲۵۲۰۰ = (\dots + \frac{1}{۱۶۱ \times ۵} + \frac{1}{۱۶۱ \times ۳} + \frac{1}{۱۶۱})^۲ = س$$

(Glaisher) اس ضابطہ کی مد سے لوک ۱۰ کی قیمت دریافت کرو۔

(۵) اگر  $۱ > ۱$  تو ثابت کرو کہ

$$\dots + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۳} + ۱ = لا$$

(۶) ثابت کرو کہ

$$ن = (۱ + \frac{1}{۳} + \frac{1}{۵} + \dots + \frac{1}{۱۰۰} - \frac{1}{۲} \text{ لوک } ن) = \frac{۱}{۲} \text{ جہاں } ۲ \text{ لوک } ۲$$

(۷) اگر چہ 'ق' دو مثبت مقداریں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ن = (ن + \frac{1}{۱} + \frac{1}{۲} + \dots + \frac{1}{ن}) = \frac{1}{۲} \text{ لوک } ق$$

(۸) ثابت کرو کہ اگر لا مثبت ہو اور بڑا ہو تو تقریباً لوک جہاں لا = لا - لوک ۲ + قو



(۹) نیز ثابت کرو کہ تقریباً لوگ مسنر لا = ۲ - ۲۰

## امثلہ ۹ (سلسلون کا تفرق اور تکمیل)

(۱) تمثالہ  $\frac{1}{1-2} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$   
 کو جبکہ لا  $> 1$  اگر تفرق کرنے سے ثابت کرو کہ اگر م مثبت صحیح عدد ہے تو

$$(1-2)^{-2} = 1 + 2 + 2^2 + \dots + \frac{(1+2)^2}{2 \times 1} + \dots$$

(۲) اگر لا  $> 1$  تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 5} + \dots = \frac{1}{2} \text{ مسنر لا} - \frac{1}{2} \text{ لوگس (لا)}$$

نیز دکھاؤ کہ  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{1}{2}$   
 (۳) ثابت کرو کہ اگر لا  $> 1$  تو

$$\frac{1}{2} \text{ مسنر لا} - \frac{1}{2} \text{ لوگس (لا)} = \frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{5 \times 3} - \frac{1}{3 \times 1}$$

(۴) ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\dots + \frac{1}{11 \times 9 \times 7} + \frac{1}{9 \times 7 \times 5} + \frac{1}{7 \times 5 \times 3} + \dots$$

کا حاصل جمع  $\dots 1.349 \dots$  ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ  $1.19314 \dots = \dots + \frac{1}{4 \times 6 \times 8} + \frac{1}{6 \times 8 \times 10} + \frac{1}{8 \times 10 \times 12}$

$$\text{اور } \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} - \frac{1}{4 \times 5 \times 6} + \dots - \frac{1}{5152326 \dots} \dots$$

(۶) ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{4 \times 5} + \dots = \frac{1}{2}$$

(۷) ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{4 \times 5} + \dots = \frac{1}{2}$$

اور

$$\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{4 \times 5} + \dots = \frac{1}{2}$$

(۸) ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{4 \times 5} + \dots = \frac{1}{2}$$

(۹) ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{4 \times 5} + \dots = \frac{1}{2}$$

(۱۰) ثابت کرو کہ

$$2 = \sqrt{1 - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{4 \times 5} + \dots}$$

## امثلہ ۶۱

(سلسلہ نئی مدد سے تفرقی مساوات کامل)

جب لا کے سلسلے کو مانکر دائرہ کی قوس کے تقریبی طول دریافت کر نیکی

(۱) نئے ہالی گن (Huyghens) کا ضابطہ ثابت کرو۔ ضابطہ یہ ہے

” نصف قوس کے وتر کے آٹھ گنے میں سے پوری قوس کا وتر گھٹاؤ لو“

ماصل تفریق کو تین سے تقسیم کرو۔  
نیز ثابت کرو کہ ۵م کی فوس میں متناسب خطا.... ۲ میں ایک کم ہے

$$(۲) \text{ مساوات } لا \frac{فرما}{فرلا} + \frac{فرما}{فرلا} + م = ما. \text{ کا خاص حل ذیل کی شکل میں حاصل کرو}$$

$$ما = (۱ - \frac{م لا}{۲ \times ۱} + \frac{م لا^۲}{۳ \times ۲ \times ۱} - \dots)$$

$$(۳) \text{ مساوات } \frac{فرما}{فرلا} + \frac{۱}{م} \frac{فرما}{فرلا} + م^۲ فدا = م کا خاص حل ذیل کی شکل میں حاصل کرو$$

$$فدا = (۱ - \frac{م^۲ فدا}{۲ \times ۲} + \dots)$$

$$(۴) \text{ مساوات } (۱ - لا) \frac{فرما}{فرلا} - لا \frac{فرما}{فرلا} = \text{کامل سلسلہ میں دریا}$$

کرو اور اس سے جب لا کا پتیلاد حاصل کرو [دیکھو دفعہ ۱۸ (۵)]

$$(۵) \text{ ثابت کرو کہ } ما = \text{جب لا تفریق مساوات } (۱ + لا) \frac{فرما}{فرلا} + لا \frac{فرما}{فرلا} =$$

کو پورا کرتا ہے۔

پس دکھاؤ کہ لا > ۱ کے لئے

$$\text{لوگ } \{ (۱ + لا) \} = لا - \frac{۱}{۲} + \frac{لا}{۳} - \frac{لا^۲}{۴} + \dots$$

$$(۶) \text{ مساوات } لا \frac{فرما}{فرلا} + (عما - لا) \frac{فرما}{فرلا} = ما. \text{ کا ایک حل}$$

ما = ج ع کی شکل میں دریافت کرو، جہاں

$$+ \frac{لا^2}{(۲+ع)ع} + \frac{لا^2}{(۱+ع)ع} + \frac{لا}{ع} + ۱ = ۶$$

نیز ثابت کرو کہ مساوات لا  $\frac{فرما}{فرلا}$  +  $\frac{ع}{ع+لا}$  -  $\frac{فرما}{فرلا}$  = ما۔  
رشتہ ما = ج قولاً سے پوری ہوتی ہے۔

$$(۷) \text{ مساوات فرما } \left\{ (۱-ع) \frac{فرما}{فرع} \right\} + ن(ن+۱) = کا۔$$

حل ذیل کی شکل میں مائل کرو

$$= ۶ \left[ ۱ - \frac{ن(ن+۱)}{۲} + \frac{ن(۲-ن)(ن+۱)(۳+ن)}{۲} - \dots \right]$$

$$+ جب [ع - \frac{ن(ن+۱)}{۳} + \frac{۲(۳-ن)(ن+۱)(۲+ن)(۴+ن)}{۵} - \dots]$$

[.....]

$$(۸) \text{ مساوات (۱-لا)} \frac{فرما}{فرلا} + ن(ن+۱) = ما۔ \text{ کا ایک حل سلسلہ}$$

میں دریافت کرو اور کس حل کے لئے علامتی جملہ لکھو۔

$$(۹) \text{ مساوات لا (۱-لا)} \frac{فرما}{فرلا} + \left\{ جب - (ع+ع+ب+۱) لا \right\} \frac{فرما}{فرلا}$$

- ع+ع+ما = کا ایک حل ذیل کی شکل میں دریافت کرو

$$= ما \left[ ۱ + \frac{ع+ع+ب}{ع+ب} + \frac{ع(ع+ب)(ع+ب+۱)}{۲ \times ۱ \times (ع+ب+۱)} + \dots \right]$$

$$+ \frac{ع(ع+ب)(ع+ب+۱)(ع+ب+۲)}{۲ \times ۱ \times (ع+ب+۱)(ع+ب+۲)} + \dots$$

$$(۱۰) \text{ مساوات } \frac{فرما}{فرلا} + \frac{۱}{ع} \frac{فرما}{فرلا} + (ک - \frac{ن}{ع}) فرما = کا ایک حل$$

ذیل کی شکل کا ہوگا

$$فہ = ا^r \left[ \dots - \frac{ک^r}{(۴+۵)۲(۳+۴)۲ \times ۲} + \frac{ک^r}{(۲+۵)۲} - ۱ \right]$$

$$(۱۱) \quad \text{مساوات: } \frac{فر}{ر} + \frac{(۱+۵)۲}{ر} \text{ فر} + \frac{ک^r}{ر} = \text{کامل حل}$$

ذیل کی شکل میں حاصل کرو

$$س = ا^r \left[ \dots - \frac{ک^r}{(۵+۵)۲(۳+۴)۲ \times ۲} + \frac{ک^r}{(۳+۵)۲} - ۱ \right]$$

$$+ \text{جب } ر^{۱-۵} \left[ \dots - \frac{ک^r}{(۵-۳)۲(۵-۴)۲ \times ۲} + \frac{ک^r}{(۵-۴)۲} - ۱ \right]$$

(۱۲) اگر ما = جب (م جب لا) تو ثابت کرو کہ

$$(۱-لا) \left( \frac{فر}{ر} - لا \right) = \frac{فر}{ر} + م = م$$

$$\text{پس دکھاؤ کہ جب } م = \frac{م}{۳} - ۱ = \frac{م}{۳} - \frac{۱}{۳} = \frac{م-۱}{۳} \text{ جب } م = \frac{م-۱}{۵} \text{ جب } م =$$

$$\dots \dots \dots \text{اور جم } م = \frac{م}{۲} - ۱ = \frac{م}{۲} - \frac{۱}{۲} = \frac{م-۱}{۲} \text{ جب } م = \frac{م-۱}{۴} \text{ جب } م = \dots$$

(۱۳) اگر لوک ما = ر جب لا تو ثابت کرو کہ

$$(۱-لا) \left( \frac{فر}{ر} - لا \right) = \frac{فر}{ر} + و = و$$

نیز ما کو لا کی صدوی قوتوں میں پھیلاؤ۔

$$[ \text{ما} = ۱ + لا + \frac{لا^۲}{۲} + \frac{لا(۱+لا)}{۳} + \frac{لا(۲+لا+لا^۲)}{۴} + \dots ]$$

$$(۱۴) \text{ اگر } م = \frac{\text{لوک}(۱+لا)}{(۱+لا)} \text{ تو ثابت کرو کہ } (۱+لا)^۲ \text{ فرما} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + (۱+لا) = م = ۱$$

پس حاصل کرو کہ  $م = لا - (۱ + \frac{۱}{۲}) لا^۲ + (۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}) لا^۳ - \dots$   
 اور دکھاؤ کہ سلسلہ  $۱ > ۱$  کے لئے مستحق ہے۔  
 (۱۵) ثابت کرو کہ اگر  $۱ > ۱$  تو

$$(\text{مس-} لا) = لا^۲ - \frac{۱}{۲} (۱ + \frac{۱}{۳}) لا^۳ + \frac{۱}{۳} (۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵}) لا^۴ - \dots$$

$$\frac{۱}{۲} (۱ + \frac{۱}{۳})$$

# پندرہواں باب

## ٹیلر کا مسئلہ

۱۸۳۔ پھیلاؤ کی شکل - فرض کر دو کہ ف (لا) متغیر لا کا

ایسا تفاعل ہے جو خاص حدود  $\pm$  عدا میں لا کی تمام قیمتوں کے لئے مستحق قوتی مسئلہ میں پھیلا یا جاسکتا ہے۔ دفعہ ۹۷ میں ثابت کیا جا چکا ہے کہ مشتق تفاعل ف (لا) اس مشابہ سلسلے سے بیان ہوگا جو ابتدائی سلسلہ کو رقم بہ رقم تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے اور  $\pm$  عدا کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لئے یہ نتیجہ صحیح ہوگا۔ مذکورہ بالا مسئلہ کے دوبارہ اطلاق سے لا کی انہیں حدود میں ف (لا) سلسلہ ف (لا) کو رقم بہ رقم تفریق کرنے سے حاصل ہوگا۔ اور اسی طرح اس سے اعلیٰ تفرقی سرور کے لئے۔

پس اگر ف (لا) =  $ل_1 + ل_2 + ل_3 + ل_4 + \dots + ل_n + \dots$  (۱)

تو ف (لا) =  $ل_1 + ل_2 + ل_3 + \dots + ل_n + \dots$   
 ف (لا) =  $ل_1 + ل_2 + \dots + ل_n + \dots$   
 ف (لا) =  $ل_1 + ل_2 + \dots + ل_n + \dots$   
 ف (لا) =  $ل_1 + ل_2 + \dots + ل_n + \dots$







$$\text{فنا}^{(۱)} = (۱) = م(م-۱) \dots (م-۳) (م-۲) (۱+۱) \dots (۲) \dots (۳) \dots$$

اب ٹیلر کے ضابطہ سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$(۱+۱) = (۲) = ۱ + م + م^۲ + م^۳ + \dots + \frac{م(م-۱)}{۲ \times ۱} + \frac{م^۲}{۲ \times ۱} + \dots$$

$$(۳) \dots + \frac{م(م-۱) \dots (م-۳) (م-۲) (۱+۱)}{۳ \times ۲ \times ۱} + \dots$$

یہ پھیلاؤ مسئلہ ثنائی کے نام سے مشہور ہے۔  
 ٹیلر کا ضابطہ ہر صورت میں بغیر بشرط کے صحیح نہیں ہے۔ یہ امر اس بات سے بھی واضح ہے کہ نتیجہ (۱۳) کی بائیں جانب کا سلسلہ  $۱ < ۱$  کے لئے شش ہے اگرچہ  $۱ > ۱$  کے لئے مستند ہے تاہم دفعہ ۱۸۲ کی تحقیقات کی بناء پر اس کے حاصل جمع کو  $(۱+۱) = ۲$  کے مساوی جائز سمجھنا مناسب نہ ہوگا۔ (اس امر کا صحیح ثبوت دفعہ ۱۸۲ میں دیا گیا ہے۔  
 (۲) دفعہ ۲۶ میں قوت نما تغاغل قی (۱) کی تعریف مساوات

فنا (۱) = فنا (۱) ..... (۴)  
 کے ایسے حل سے کی گئی تھی جو  $۱ = ۰$  کے لئے ایک کے مساوی ہے۔ اس سے فوراً حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{فنا}^{(۱)} (۱) = \text{فنا} (۱) \dots \dots \dots (۵)$$

پس فنا (۰) = ۱ اور فنا (۰) = ۰ ..... (۶)  
 اس لئے میکلو رن کے پھیلاؤ سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ق} (۱) = (۱) = ۱ + ۱ + \frac{۱^۲}{۲ \times ۱} + \frac{۱^۳}{۳ \times ۲ \times ۱} + \dots + \frac{۱^{\infty}}{\infty} \dots \dots \dots (۷)$$

(۳) فرض کر دو کہ فنا (۱) = جم لا ..... (۸)

نی الواقعی ایسی صورتیں جنہیں ٹیلر کا پھیلاؤ مستند ہوتا ہے حالانکہ حاصل جمع نہ  $(۱+۱)$  کے مساوی نہیں ہوتا۔

دفعہ ۶۴ میں ثابت کیا گیا تھا کہ

$$ف^{(ن)}(لا) = جم(لا + \frac{ن}{۲})$$

اس لئے  $ف^{(ن)}(۰) = ۱$ ،  $ف^{(ن)}(۰) = جم \frac{ن}{۲}$  ..... (۹)

پس  $ف^{(ن)}(۰)$  صفر ہوگا جبکہ  $ن$  طاق ہے اور  $\pm ۱$  کے مساوی ہوگا جبکہ  $ن$  جفت ہے۔ اس میں مثبت یا منفی کی علامت  $\frac{ن}{۲}$  کے بغیر یا طاق ہونے پر منحصر ہوگی۔

میکلورن کے ضابطہ میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$جم لا = ۱ - \frac{لا^۲}{۲} + \frac{لا^۴}{۴} - \dots + \frac{لا^{۲ن}}{۲ن} (۱ -) + \dots (۱۰)$$

(۴) فرض کر دو کہ  $ف^{(ن)}(لا) = جب لا$

اس لئے  $ف^{(ن)}(لا) = جب(لا + \frac{ن}{۲})$  ..... (۱۱)

اور  $ف^{(ن)}(۰) = ۱$ ،  $ف^{(ن)}(۰) = جب \frac{ن}{۲} = جب \left\{ \frac{ن}{۲} + ۱ - \frac{ن}{۲} \right\}$

..... (۱۲)

پس  $ف^{(ن)}(۰)$  صفر ہوگا جبکہ  $ن$  جفت ہے اور  $\pm ۱$  کے مساوی ہوگا جبکہ  $ن$  طاق ہے نیز مثبت یا منفی کی علامت  $\frac{ن}{۲} - ۱$  کے جفت یا طاق ہونے پر منحصر ہوگی۔ اس لئے میکلورن کے ضابطے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$جب لا = ۱ - \frac{لا^۲}{۲} + \frac{لا^۴}{۴} - \dots + \frac{لا^{۲ن+۱}}{۲ن+۱} (۱ -) + \dots (۱۳)$$

نتیجہ (۱۰) اور (۱۳) دفعہ (۱۱) میں باقاعدہ طور پر ثابت کئے جا چکے ہیں۔

(۵) فرض کر دو کہ  $ف^{(ن)}(لا) = لوگ(۱ + لا)$  ..... (۱۴)

$$\text{اسلئے ف (لا) = } \frac{1}{1+لا} \text{ اور } 1 < \text{ا کیلئے ف (ن) (لا) = } \frac{1-ن}{ن} \frac{1-ن}{1+لا}$$

پس ف (۰) = ف (۰) = ۱ اور ن < ا کیلئے ف (ن) (۰) = (۱-ن) (۱-ن) ... (۱۵)

میکلوورن کے ضابطے میں درج کرنے سے ماہل ہوتا ہے کہ

$$\text{لوک (۱+لا) = لا - } \frac{لا}{۲} + \frac{لا^۲}{۳} - \dots + \frac{1-ن}{ن} \frac{1-ن}{1+لا} \dots (۱۶)$$

دفعہ ۱۷ دیکھو۔۔۔

جب کبھی دئے ہوئے تقاضے کے ن دیں مشتق کے لئے عام ضابطہ معلوم نہ ہو تو ایسی صورت میں متواتر مشتقات حسب ضرورت دریافت کر لینے چاہئیں۔ بعض اوقات حسب ضرورت حل کی آخری سطریں ایسی رقموں کو نظر انداز کرنے سے محفل کی جاسکتی ہیں جن رقموں سے آخری نتیجہ میں کچھ ماہل نہیں ہوتا۔

مثال۔ مس لا کو لا تک پھیلاؤ۔

$$\text{ف (لا) = مس (لا)}$$

رکنے سے بالترتیب ماہل ہوتا ہے کہ

$$\text{ف (لا) = ۱ + مس لا}$$

$$\text{ف (لا) = } ۲ \text{ مس لا قط لا} = ۲ \text{ مس لا} + ۲ \text{ مس لا}$$

$$\text{ف (لا) = (۲+۶) مس لا قط لا} = ۸ \text{ مس لا} + ۲ \text{ مس لا} + ۶ \text{ مس لا}$$

$$\text{ف (لا) = (۱۶+۲۳) مس لا قط لا} = ۲۰ \text{ مس لا} + ۲۳ \text{ مس لا}$$

$$= ۱۶ \text{ مس لا} + ۲۰ \text{ مس لا} + ۲۳ \text{ مس لا}$$

$$\text{ف (لا) = (۱۶+۲۰+۲۳) مس لا قط لا} = ۵۹ \text{ مس لا} + ۲۰ \text{ مس لا} + ۲۳ \text{ مس لا}$$

$$= ۱۶ \text{ مس لا} + ۲۰ \text{ مس لا} + ۲۳ \text{ مس لا} + ۲۰ \text{ مس لا}$$

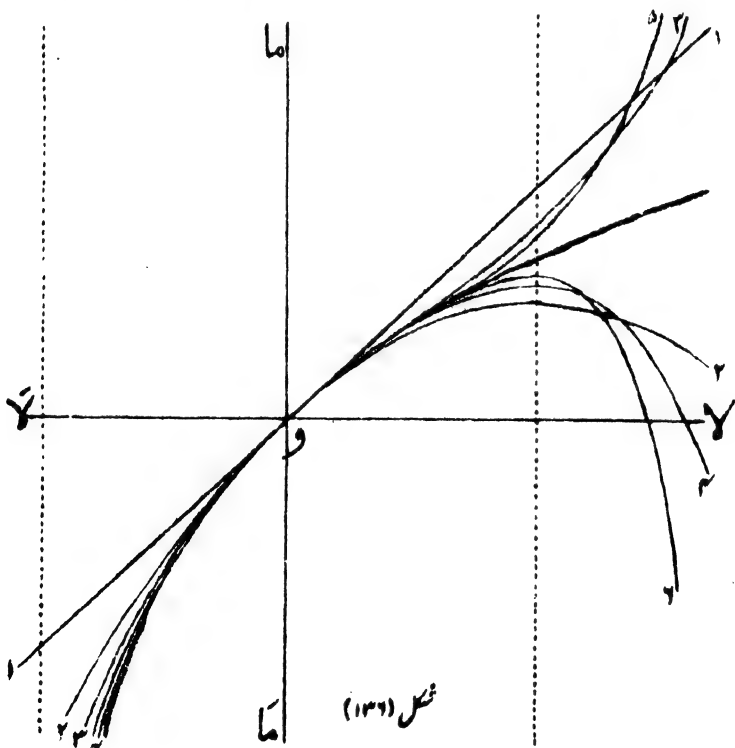
$$\text{ف (لا) = } ۲۶۲ \text{ مس لا قط لا} + \text{دیگر وغیرہ}$$

$$\text{ف (لا) = } ۲۶۲ \text{ قط لا} + \dots$$





کہ نقطہ (لا) = پیر دے ہوئے خمی ما = ف (لا) سے اس کا (ن-۱) رتبہ کا (ریکوع دفعہ ۱۸۹) تہاں ہو۔ اب سوال یہ ہے کہ ایک خاص وسعت کے اندر لا کی تمام خمیوں کے لئے، ایک خمی کے قلم ہٹاؤ کے حدود، دوسرے خمی سے دریافت کئے جائیں، اس ہٹاؤ کا خمیہ خمیوں کے خمیوں کے فرق سے کیا جاتا ہے۔ شکل ۱۳۶ میں اس امر کی توضیح کی گئی ہے، مولیٰ لکیر سے خمی ما = نوک (لا) کی تقسیم دکھائی گئی ہے اور بائیں لکیر سے ذیل کے ”تقریبی خمی“ دکھائے گئے ہیں۔







$$\begin{aligned} & \text{ج} \text{ (لا) فرلا} > \text{ج} \text{ (لا) فالا} > \text{ج} \text{ (لا) فرلا} > \text{ج} \text{ (لا) فرلا} \\ & \text{اور چونکہ} \text{ج} \text{ (لا) فالا} = \text{ج} \text{ (لا) فرلا} \end{aligned}$$

اس لئے  $\text{ج} \text{ (لا) فرلا} > \text{ج} \text{ (لا) فالا} > \text{ج} \text{ (لا) فرلا} > \text{ج} \text{ (لا) فرلا}$  ..... (۹)  
اسی قسم کی دلیل سے حاصل ہو سکتا ہے کہ

$\text{ج} \text{ (لا) فرلا} > \text{ج} \text{ (لا) فالا} > \text{ج} \text{ (لا) فرلا} > \text{ج} \text{ (لا) فرلا}$  ..... (۱۰)  
اور اسی طرح دیگر نتیجے حاصل کئے جاسکتے ہیں حتیٰ کہ ہم ذیل کے نتیجے پر پہنچتے ہیں۔

$$\text{ج} \text{ (لا) فرلا} > \text{ج} \text{ (لا) فالا} > \text{ج} \text{ (لا) فرلا} > \text{ج} \text{ (لا) فرلا} \text{ ..... (۱۱)}$$

پس ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{ج} \text{ (لا) فرلا} = \text{ج} \text{ (لا) فالا} \text{ ..... (۱۲)}$$

جہاں ج کوئی مقدار لا اور لا کے درمیان ہے۔  
موجودہ اطلاق میں چونکہ فالا (لا) درجہ (۱-ن) کا مشتق صحیح تفاعل ہے اس لئے اسکان۔ وال مشتق دفعہ ۶۴ کی رو سے صفر ہوگا اور اسلئے  
جب (لا) کان۔ وال مشتق نتیجہ (۱) سے ف (لا) کے مساوی ہوگا بشرطیکہ آخر الذکر مشتق وجود رکھتا ہو۔  
اس سے اخذ ہوتا ہے کہ

$$\text{جب (لا) فرلا} = \text{ج} \text{ (لا) فالا} \text{ ..... (۱۳)}$$

جہاں ج وقفہ صفر سے ھ میں مشتق ف (لا) کی بُری سے بُری

قیمت اور چھوٹی سے چھوٹی قیمت کے درمیان واقع ہے۔ اور اب ہم فرض کرتے ہیں کہ ف<sup>ن</sup> (لا) وقفہ لا = سے لا = ھ کے درمیان مسلسل ہے اس لئے صفر اور ھ کے درمیان لا کی ایک ایسی قیمت ضرور ہوگی کہ ف<sup>ن</sup> (لا) = ج۔ اگر اس قیمت کو ھ سے تعبیر کیا جائے تو

$$\text{جب } (لا) = \frac{لا}{ان} \text{ ف}^{\text{ن}} (\text{طما ھ}) \dots \dots (۱۴)$$

جہاں طما کی قیمت کے بارے میں ہمیں صرف یہ معلوم ہے کہ یہ صفر اور ایک کے درمیان ہے۔

نتیجہ (۱۴) لا = اور لا = ھ کے وقفہ میں بشمول طرفین صحیح ہے،

اور اس میں لا = ھ درج کر کے ف<sup>ن</sup> (لا) اور جب (لا) کی قیمتیں (۱) میں رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف} (\text{ھ}) = \text{ف} (۰) + ھ \text{ ف} (۰) + \frac{ھ}{۲} \text{ ف} (۰) + \dots \dots$$

$$+ \frac{ھ}{۱-ن} \text{ ف}^{\text{ن}} (۰) + \frac{ھ}{ان} \text{ ف}^{\text{ن}} (\text{طما ھ}) \dots \dots (۱۵)$$

اس شکل میں مسئلہ میکلون بالکل ٹھیک ہے۔ ہمیں مفروضہ یہ ہے کہ ف<sup>ن</sup> (لا) اور اس کے ن۔ وین مشتق تک تمام مشتق وقفہ صفر اور ھ کے درمیان مسلسل ہیں۔ لیکن ان شرائط میں کہ ف<sup>ن</sup> (لا) وجود رکھتا ہو اور پورے وقفہ میں مسلسل ہو باقی تمام شرائط شامل ہیں۔ اگر ہم لکھیں کہ ف<sup>ن</sup> (لا) = ف<sup>ن</sup> (ل + لا) \dots \dots (۱۶) تو حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ف}^{\text{ن}} (ل + لا) = \text{ف}^{\text{ن}} (ل) + ھ \text{ ف}^{\text{ن}} (ل) + \frac{ھ}{۲} \text{ ف}^{\text{ن}} (ل) + \dots$$

$$+ \frac{1-\text{ن}}{1-\text{ن}} \text{فما}^{(1-\text{ن})} (ل) + \frac{\text{ن}}{\text{ن}} \text{فما}^{(\text{ن})} (ل+ط+ھ) (۱۷)$$

۲۸۸

جہاں پہلے کی طرح ایک ط+ھ۔  
یہ مسئلہ ٹیلر کی صحیح شکل ہے۔ اس مسئلہ میں یہ مان لیا گیا ہے کہ  
فما<sup>(ن)</sup> (لا) وقفہ لا = لا اور لا = لا + ھ میں بشمول ط فریق وجود رکھتا ہے  
اور سلسل ہے۔

نتائج (۱۵)، اور (۱۷) میں آخری قسمیں بالترتیب میکلو رن اور ٹیلر کے  
مسائل میں نگرانج کی "باقی" کی شکلیں کہلاتی ہیں۔ اس کتاب میں چند ایسے  
نتائج حاصل کئے گئے ہیں جن کی عام شکل ضابطہ (۱۷) ہے۔  
مثلاً ن = ۱ رکھئے

$$\text{فما}^{(ل+ھ)} = \text{فما}^{(ل)} + ھ \text{فما}^{(ل+ط+ھ)} \dots (۱۸)$$

اور ن = ۲ رکھئے

$$\text{فما}^{(ل+ھ)} = \text{فما}^{(ل)} + ھ \text{فما}^{(ل)} + \frac{ھ^2}{2} \text{فما}^{(ل+ط+ھ)} \dots (۱۹)$$

اور یہ بالترتیب دفعہ ۵۶ (۹) اور دفعہ ۷۰ (۲۲) کے مطابق ہیں۔

## ۱۸۶ - متبادل ثبوت -

ٹیلر (یا میکلو رن) کے مسئلہ کا ثبوت جو اکثر دیا جاتا ہے وہ درحقیقت  
(۲) کے طرز ثبوت کے موافق ہوتا ہے۔ کسی دئے ہوئے منحنی

$$\text{ما} = \text{ف} (لا) \dots (۱)$$

کا مقابلہ منحنی

$$\text{ما} = ل + ل + ل + \dots + ل + ل + ل + \dots (۲)$$

سے کیا جاتا ہے۔ یہ فرض کر لیا جاتا ہے کہ دوسرے منحنی کے (ن+۱) سر  
اس شرط سے دریافت کئے جاتے ہیں کہ دونوں منحنی نقاط لاجہ اور لا = ھ

ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں، نیز نقطہ لا = پر دونوں منحنیوں کے اشتقاق

فرما، فرما، فرما، ..... فرما<sup>(۱-۱)</sup>  
فرلا، فرلام، فرلام<sup>(۱-۱)</sup>  
کی قیمتیں مساوی ہیں۔ ان شرائط سے پہلے نتیجہ کے مطابق حاصل ہوتا ہے

$$ا = ف(۰)، ا = ف(۰)، ا = ف(۰) \dots \dots$$

$$ا = ف(۰) = \frac{۱}{۱-۱} \dots \dots (۳)$$

$$اور ف(۵) = ا + ا + ا + \dots + ا + ا + ا + \dots + ا + ا + ا + \dots (۴)$$

اس آخری مساوات سے ا کی قیمت دریافت ہو سکتی ہے۔  
اگر فارلا سے دونوں منحنیوں کے معینوں کا فرق تعبیر کیا جائے تو  
ظاہر ہے کہ

$$فار(۰) = ف(۰)، فار(۰) = ف(۰)، فار(۰) = ف(۰) \dots \dots (۵)$$

$$اور فار(۵) = ف(۵) \dots \dots (۶)$$

چونکہ فارلا صفر ہے جبکہ لا = اور لا = ا اس لئے ظاہر ہے کہ  
مناسب شرائط کے زیر عمل فارلا بھی صفر اور ا کے درمیان لا  
کی کسی قیمت کے لئے صفر ہوگا۔ فرض کرو کہ یہ قیمت لا = طہا ہے  
جہاں ا < طہا < .

نیز چونکہ فارلا صفر ہے جبکہ لا = اور لا = طہا، فارلا  
صفر ہوگا لا کی ایک ایسی قیمت کے لئے جو صفر اور طہا کے درمیان  
واقع ہے، فرض کرو کہ لا = طہا، جہاں طہا < طہا < .

اسی طرح عمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ فار<sup>(۱-۱)</sup> صفر ہوگا جبکہ

$$(\lambda) = 0 \text{ اور } (\lambda) = \text{طہا} - \text{طہا} \text{ جہاں } \lambda < \text{طہا} - \lambda$$

$$\text{پس } \text{فا}^{(ن)} (\text{طہا}) = \dots \dots \dots (۴) \dots \dots \dots$$

اب (۱) اور (۲) کا مقابلہ کرنے سے ظاہر ہے کہ

$$\text{فا}^{(ن)} (\lambda) = \text{ف}^{(ن)} (\lambda) - \text{ن} \text{ لے} \dots \dots \dots (۸)$$

اس لئے (۷) کو استعمال کرنے سے

$$\text{ن} = \frac{1}{\text{ن}} \text{ ف}^{(ن)} (\text{طہا}) \dots \dots \dots (۹)$$

اس لئے (۳) اور (۹) کو (۴) میں درج کرنے سے پہلے کی طرح حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف} (\text{ہ}) = \text{ن} (\text{ہ}) + \text{ف}^{(۰)} (\text{ہ}) + \frac{\text{ہ}^{(۰)}}{1} \text{ ف}^{(۰)} (\text{ہ}) + \dots \dots \dots$$

$$+ \frac{\text{ہ}^{(۱)}}{1-\text{ن}} \text{ ف}^{(ن-۱)} (\text{ہ}) + \frac{\text{ہ}^{(ن)}}{\text{ن}} \text{ ف}^{(ن)} (\text{طہا}) \dots \dots (۱۰)$$

اس مسئلہ کی صداقت کے شرائط وہی ہیں جو دفعہ ۱۰۵ میں نتیجہ (۱۵) کے بعد درج کئے گئے ہیں۔

۱۸۷ - کوشی (Cauchy) کی باقی کی شکل -

ن رقموں کے بعد باقی کی رقم کو دوسری شکل میں ذیل کے طریقے سے حاصل کیا جاسکتا ہے -

(Homersham Cox)

مذکورہ بالا ثبوت کا زیادہ تر حصہ ہی ہے جو ہومرشام کاکس

(Cam. and Dub. Math. Journ)

نے کیمرج اور ڈبلن کے رسالہ ریاضی

۱۸۵۱ء میں دیا تھا

اگر فادلا پر ذیل کی شرائط عائد ہوں یعنی

(فأر) = (فأر)، ..... فأ (ن-ا) ..... (=)..... (أ)

تو تکمل باخص سے

$$\left[ \left( \frac{1}{h} \right) \cdot \frac{1}{f_a} \right] = \left( \frac{1}{h} \right) \cdot \frac{1}{f_a} \quad (1-1)$$

$$+ \frac{(1-n)}{h} \int_{\frac{(n-1)}{h}}^{\frac{n}{h}} f(x) dx = f\left(\frac{n}{h}\right) \left(1 - \frac{(n-1)}{h}\right) + \frac{(1-n)}{h} \int_{\frac{(n-1)}{h}}^{\frac{n}{h}} f(x) dx$$

(2) . . . . .

کیونکہ تھک شدہ رقم دونوں حدود پر منفر ہے۔ اس عمل کو (ن-۱) مرتبہ استعمال کرنے کا اصل ہوتا ہے

$$\int \frac{1-x}{1-x^2} dx = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln|1-x| + C$$

یعنی فا (ه) =  $\frac{1}{(1 - \frac{1}{5})}$  فا (ن) فا (لا) فر (ا) ..... (۳)

۴۹۰ اور چونکہ شکل مسلسل ہے اس لئے دفعہ ۹۱ (۳) سے اخذ ہوتا ہے کہ

$$\text{فا}(n) = \frac{n}{(1-n)} - \text{فا}^{(n-1)} + \text{فا}^{(n)} \dots (3)$$

جہاں، کتب،

اس سے ظاہر ہے کہ دفعہ ۱۸۵ نتیجہ (۱۵) کی آخری رقم کی بجائے ذیل کی رقم لکھی جاسکتی ہے

(1-ط) ف (ن) (طه) ..... (ع)

اور نتیجہ (د) کی آخری رقم کی بجائے ذیل کی رقم لکھی جاسکتی ہے۔



اسے (۱+ط<sub>۱</sub>)<sup>۴</sup> اور ذیل کے نمونے کے ن اجزاء کا حاصل ضرب خیال کیا جاسکتا ہے

$$(۵) \dots\dots\dots \frac{۱+۱-۴}{۱+ط<sub>۱</sub>} \text{ یا } (۱+۴ \frac{۱}{ر}) \frac{۱}{۱+ط<sub>۱</sub>}$$

اگر ۱ < لا < ۱ تو کسر  $\frac{۱}{۱+ط<sub>۱</sub>}$  کی قیمت محض اور لا کے درمیان ہوگی اور چونکہ (۵) کا پہلا جزو ضربی ر کے بڑھنے کے ساتھ ساتھ انتہائی قیمت - کی طرف مائل ہوتا ہے اس لئے ظاہر ہے کہ ن کو کافی بڑھالینے سے جملہ (۴) کی قیمت کو کسی مخصوص چھوٹی مقدار سے کم کیا جاسکتا ہے۔

اس لئے اگر ۱ < لا < ۱ تو ہم لکھ سکتے ہیں

$$(۱+لا) = ۴ + ۱ + ۴ + \frac{۴(۱-۴)}{۲ \times ۱} + لا + \dots\dots\dots \infty \text{ تک } (۶)$$

لیکن لا کے منفی ہونے کی صورت میں مذکور بالا نتیجہ نہیں حاصل ہوتا اگرچہ لا > ۱ کیونکہ لا = لا درج کرنے سے کسر  $\frac{۱}{۱+ط<sub>۱</sub>}$  کی قیمت

ایک سے صرف اسوقت کم ہے جبکہ ط<sub>۱</sub> >  $\frac{۱-لا}{لا}$

اور اگر لا <  $\frac{۱}{۱}$  سے تو ط<sub>۱</sub> کو اس قیمت سے کم فرض کرنے کے واسطے کوئی دلیل نہیں ہے۔

اس صورت میں باقی کی رقم کو گوشہ کی شکل [دفعہ ۱۸ (۵)] میں لکھنا مفید ہوگا۔ اب (۴) کی بجائے ذیل کا جملہ حاصل ہوتا ہے

$$۴(۱-۴) \dots\dots\dots (۴-ن-۱) \frac{۱}{(۱+ط<sub>۱</sub>)^{۱-ن}} \dots\dots\dots ۴(۱-۴) \frac{۱}{(۱+ط<sub>۱</sub>)^{۱-۵}}$$

یہ م لا (۱+ط<sub>۱</sub>)<sup>۴</sup> اور ذیل کے نمونے کے (ن-۱) اجزاء کا حاصل



ضرب ہے

$$(۸) \dots\dots\dots (1 + \frac{۴}{r}) \frac{۱ - طملا}{۱ + طملا}$$

اگر لا مثبت ہے تو اس جملہ کی انتہا صفر اور لا کے درمیان ہوگی پس اگر لا > ۱ تو باقی کی انتہا پہلے کی طرح صفر ہے۔  
اگر لا = - لا جبکہ ۱ < لا < ۰ تو جملہ (۸) ذیل کی شکل اختیار کرتا ہے

$$(۹) \dots\dots\dots (1 - \frac{۴}{r}) \frac{۱ - طملا}{۱ - طملا}$$

جس کی انتہا صفر اور لا کے درمیان ہے۔  
اس لئے نتیجہ نکلتا ہے کہ باقی کی رقم (۹) کی انتہا - ۱ اور + ۱ کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لئے صفر ہے۔

$$(۳) \dots\dots\dots (۱۰) \dots\dots\dots \text{اگر } f(لا) = \text{لوگ}(۱ + لا) \dots\dots\dots (۱۰)$$

$$(۱۱) \dots\dots\dots \text{تو } \frac{لا}{ن} f(ن) (طملا) = \frac{(۱ - ن)}{ن} \frac{لا}{(۱ + طملا)} \dots\dots\dots (۱۱)$$

پہلے جزو ضربی کی انتہائی قیمت صفر ہے اور اگر لا مثبت ہو اور لا سے

$$\text{تو } \frac{لا}{۱ + طملا} \leftarrow ۱ \text{ پس (۱۱) کی انتہائی قیمت جبکہ } ن \leftarrow \infty \text{ صفر ہے اور}$$

دفعہ ۸۴ کا پھیلاؤ (۱۶) لا = ۰ سے لا = ۱ کے لئے بشمول طرفین صحیح ہے  
شکل ۱۳۶ دیکھو۔

باقی کی رقم کی اوپر دہائی شکل سے لا کی ان منفی قیمتوں پر بھی غور نہیں کر سکتے جن کے لئے لا > ۱ اس لئے بجائے (۱۱) کے کوششی کی باقی کی رقم یہ حاصل ہوتی ہے

$$(۱۲) \dots\dots\dots (1 - \frac{۴}{r}) \frac{لا}{۱ + طملا} \dots\dots\dots (۱۲)$$



صفر ہوگا، فرض کرو کہ قیمت لا = لا ہے، اور اسی طرح لا اور لا کے درمیان لا کی کسی ایک قیمت کے لئے صفر ہوگا جو فرض کرو کہ لا = لا ہے۔ اب مذکورہ بالا مسئلہ کے مکرر استعمال سے اگر فا (لا) وقفہ لا اور لا میں مسلسل ہے تو یہ صفر ہوگا لا کی کسی خاص قیمت کے لئے جو لا اور لا کے درمیان واقع ہے، فرض کرو کہ یہ لا = لا ہے، پس اگر تخمینات (۱) میں سے کسی ایک تخمینہ کو اسطورہ مسلسل بدلا جائے کہ تینوں نقطے لا = لا، لا، لا، ایک ہی نقطہ لا = لا پر منطبق ہو جائیں تو فا (لا) فا (لا) فا (لا) کی قیمت بھی صفر ہوگی یعنی لا = لا کے لئے ذیل کی مساویں ایک ساتھ پوری ہوں گی

فما (لا) = خما (لا) فما (لا) = فا (لا) فما (لا) = خما (لا) ... (۳)  
بالفاظ دیگر اگر دو تخمینوں کا کسی نقطہ پر دوسرے رتبہ کا تماس ہو تو اس نقطہ پر ما، فرما، فرما کی قیمتیں دونوں تخمینوں کے لئے مساوی ہوں گی

مثال :- منحنی ما = فما (لا) ... (۴)  
سے کسی دئے ہوئے نقطہ پر دوسرے رتبہ کے تماس رکھنے والے دائرہ کی مساوات دریافت کرو۔

مرکز (لا، ما) اور نصف قطر دالے دائرہ کی مساوات ہے

$$(لا - لا)^2 + (ما - ما)^2 = ر^2 \dots \dots \dots (۵)$$

اگر اسے بلحاظ لا دو مرتبہ تفریق کیا جائے تو

$$لا - لا + (ما - ما) = \frac{فرما}{فرلا} \dots \dots \dots (۶)$$

$$اور ۱ + \left(\frac{فرما}{فرلا}\right) + (ما - ما) = \frac{فرما}{فرلا} \dots \dots \dots (۷)$$

ان نتائج میں ما کو لا کا متاعل فرض کیا جائے جسکی تعین مساوات (۵) سے ہوتی ہے۔ لیکن اگر دائرہ کا منحنی (۴) کے ساتھ نقطہ (لا، ما) پر دوسرے رتبہ کا تماس ہو تو ما، فرما اور فرما کی قیمتیں منحنی اور دائرہ کے لئے ایک ہی ہوں گی۔



۶۹۴

اس سے اخذ ہوتا ہے کہ مناسب شرائط کے ماتحت

$$\text{فا} \frac{1+\text{ھ}}{1+\text{ن}} = \text{فا} (1+\text{ھ}) \quad \text{فا}^{(1+\text{ن})} (1+\text{طماھ}) \dots (12)$$

جہاں  $\text{طما} > 1$ ، پس اگر  $\text{ھ}$  لانا چھوٹا ہو تو معینوں کا فرق  $(1+\text{ن})$  دیں رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے۔ علاوہ ازیں اس کی علامت کا  $\text{ھ}$  کے ساتھ بدلنا یا نہ بدلنا ان کے جفت یا طاق ہونے پر منحصر ہے۔

مثلاً منحنی کا حماسی خط سے ہٹاؤ نقطہ تماس کی پڑوس میں اکثر دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہوتی ہے اور اس لئے عموماً منحنی اس نقطہ پر حماسی خط کو عبور نہیں کرتا۔ منحنی کا منحنی دائرہ سے ہٹاؤ تیسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہوتی ہے اور اس لئے اکثر منحنی دائرہ کو عبور کرتا ہے۔ صفحہ ۶۷۹ پر شکل ۱۱۶ دیکھو۔ لیکن اگر دائرہ سے تماس جو تھے رتبہ کا ہو جیسا کہ مخروطی کے راس پر ہوتا ہے تو منحنی دائرہ کو عبور نہیں کرتا۔ اسی بات کی مزید مثالیں صفحہ ۶۷۹ پر شکل ۱۳۶ میں دکھائی گئی ہیں، منحنیات ۱، ۳، ۵ منحنی ۱ = لوک (۱+۱) کو عبور نہیں کرتے لیکن منحنیات ۲، ۴، ۶ عبور کرتے ہیں۔

## ۱۹۰۔ اعظم اور اقل قیمتیں۔

اگر  $\text{فما} (1)$  متغیر  $(1)$  کا ایسا تفاعل ہو جس کے پہلے اور دوسرے مشتق متغیر کی تمام زیر بحث قیمتوں کے لئے محدود اور مسلسل ہوں تو

$$\text{فما} (1+\text{ھ}) - \text{فما} (1) = \text{ھ فما} (1) + \frac{\text{ھ}^2}{2} \text{فما} (1+\text{طماھ}) \dots (1)$$

جہاں  $\text{طما} < 1$ ، اس میں  $\text{ھ}$  کو کافی چھوٹا لینے سے بائیں جانب کی دوسری رقم کو عموماً مقدار میں پہلی رقم سے چھوٹا بنایا جاسکتا ہے اور اس صورت میں  $\text{فما} (1+\text{ھ}) - \text{فما} (1)$  کی علامت وہی ہوگی جو  $\text{ھ فما} (1)$  کی ہے یعنی  $\text{ھ}$  کے ساتھ اس کی علامت بدلے گی۔ اب اگر  $\text{فما} (1)$  تفاعل  $\text{فما} (1)$  کی اعظم یا اقل قیمت ہو تو فرق  $\text{فما} (1+\text{ھ}) - \text{فما} (1)$  کی علامت  $\text{ھ}$  کی

کافی چھوٹی قیمتوں کے لئے، ایک ہی ہوگی خواہ وہ مثبت ہو یا منفی۔  
پس موجودہ شرائط کے ماتحت تفاعل کی اعظم یا اقل قیمت کے لئے  
ضروری ہے کہ  $\text{فما} (1) = 0$ ۔  
اب فرض کرو کہ  $\text{فما} (1) = 0$ ۔ تو نتیجہ (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{فما} (1+ھ) - \text{فما} (1) = \frac{ھ}{۲} \quad \text{فما} (1+ط ھ) - \text{فما} (1) = 0 \dots \dots (۲)$$

جب، ھ کافی چھوٹا ہو تو بائیں جانب کی علامت وہی ہوگی جو  $\text{فما} (1)$   
کی ہے۔ پس اگر  $\text{فما} (1)$  مثبت ہے تو  $\text{فما} (1+ھ) < \text{فما} (1)$  سے  
خواہ ھ مثبت ہو یا منفی یعنی  $\text{فما} (1)$  اقل قیمت ہے۔

اسی طرح اگر  $\text{فما} (1)$  منفی ہے تو  $\text{فما} (1)$  اعظم قیمت ہے۔  
اگر  $\text{فما} (1)$  بھی  $\text{فما} (1)$  کے ساتھ صفر ہو جائے تو (۱) کے پھیلاؤ میں  
زائد رقم لینا ضروری ہوگا۔  
عام صورت پر غور کریں گے لئے فرض کرو کہ

$$\text{فما} (1) = 0, \text{فما} (1) = 0, \dots \dots \text{فما} (1-n) = 0 \dots \dots (۳)$$

$$\text{لیکن } \text{فما} (1) \neq 0 \dots \dots \dots (۴)$$

$$\text{تو } \text{فما} (1+ھ) - \text{فما} (1) = \frac{ھ}{n} \quad \text{فما} (1+ط ھ) - \text{فما} (1) = 0 \dots \dots (۵)$$

اگر ھ کافی چھوٹا ہے تو اس کی علامت وہی ہے جو ھ  $\text{فما} (1)$   
کی ہے۔ اگر ن طاق ہے تو اس کی علامت ھ کی علامت پر منحصر ہے  
اور اس لئے اس نقطہ پر تفاعل کی اعظم یا اقل قیمت نہیں ہے۔ لیکن اگر  
ن جفت ہے تو اس نقطہ کا اعظم یا اقل ہونا  $\text{فما} (1)$  کے منفی یا مثبت  
ہونے پر منحصر ہے۔

علامت میں اسے ذیل کی طرح بیان کیا جاسکتا ہے۔ لاکسی ہی ہونی  
قیمت کے لئے تفاعل  $\text{فما} (1)$  کی اعظم یا اقل قیمت صرف اس صورت میں

ہوگی جبکہ لا کی اس قیمت کے لئے سب سے پہلا صفر نہ ہونے والا شقوق  
جفت رتبہ کا ہو، ورنہ نہیں ہوگی۔ شقوق کے منفی قیمت ہونے پر یہی ہے  
تفاضل کا اعظم یا اقل ہونا اس شقوق کے منفی قیمت ہونے پر یہی ہے۔

**مثال ۱ :-** فدا (لا) = جمن لا + جم لا ..... (۶)

اس لئے فدا (لا) = جمن لا - جب لا، فدا (لا) = جمن لا - جم لا  
فدا (لا) = جمن لا + جب لا، فدا (لا) = جمن لا + جم لا  
لا = کے لئے صفر نہ ہونے والا پہلا شقوق فدا (لا) جو تھے رتبہ کا ہے اور  
چونکہ فدا (۰) مثبت ہے لہذا فدا (۰) تفاضل فدا (لا) کی اقل قیمت ہے  
یہ امر فدا (لا) کے پھیلاؤ سے بھی ظاہر ہے

$$\text{فدا (لا)} = ۲ + (۱ + \frac{\text{لا}}{۲} + \frac{\text{لا}}{۱} + \dots) \dots (۷)$$

**مثال ۲ :-** فرض کریں کہ ق = ب جم طما - ج جم ۲ طما ..... (۸)

$$\text{فرق} = \text{ب جب طما} + \text{ج جب ۲ طما}$$

$$= \text{ب جب طما} - \text{ج جم طما} - \text{ب}$$

$$\text{فرق} = \text{ب جب طما} + \text{ج جم ۲ طما}$$

$$= \text{ب جب طما} - \text{ج جم طما} - \text{ب} - \text{ج جب ۲ طما}$$

$$\text{فرق} = \text{ب جب طما} - \text{ج جب ۲ طما}$$

$$\text{فرق} = \text{ب جب طما} - \text{ج جم ۲ طما}$$

اعتقاد کے لئے صرف پہلے رتبہ کے زاویوں پر غور کر دے۔ مگر ب < ۲ ج تو  
ق کی قیمت صرف طما = کی صورت میں ہے اور طما = کیلئے

فرق  $\frac{فرق}{فرطہ}$  > اس لئے ق کی اس مقام پر اعظم قیمت ہے۔

اگر ب = ۴ ج توق اقل ہے جبکہ طہ = ۰ اور اعظم ہے جبکہ طہ = جیم  $\frac{ب}{ج}$ ،

اگر ب = ۴ ج توق طہ = ۰ کے لئے  $\frac{فرق}{فرطہ}$ ،  $\frac{فرق}{فرطہ}$ ،  $\frac{فرق}{فرطہ}$  صفر ہیں اور

فرق  $\frac{فرق}{فرطہ}$  منفی ہے۔ پس ق اعظم قیمت ہے۔

یہ مثال ذیل کے سوال کی تحقیقات میں نمودار ہوتی ہے۔ ایک مربع تیرا انتصابی سنوی میں واقع ہے اور دو چسکنی میخوں پر جو ایک ہی افقی خط میں ہیں ٹکا ہوا ہے۔ توازن کے مقامات پر غور کرو۔ اگر ب مربع کے وتر یا بین زاوی کا طول ہے اور ج میخوں کے درمیان فاصلہ ہے توق توانائی بالقوہ کے تناسب ہے جبکہ میخوں کو طانے والے خط کو کاٹنے والا بین زاوی انتصابی خط سے طہ کا زاویہ بنانا ہے توازن کے لئے ق کی یقیم قیمت ہونی چاہئے اور قائم توازن کے لئے ق کو اقل ہونا چاہئے۔

## ۱۹۱۔ مستوی منحنیات کا صغاری ہندسہ۔

فرض کرو کہ مستوی منحنی کے کسی نقطہ و کو سبدا مان لیا جاتا ہے اور نقطہ و پر کے تماس اور عماد کو محدودوں کے محور مانا جاتا ہے ابتدا کے متصل منحنی کے کسی نقطہ ن کے محدود کو قوس و ن سے اس کی رقوم میں بیان کرنا مطلوب ہے۔

اگر اختصار کے لئے تفرقات بلحاظ س کے زبر سے ظاہر کئے جائیں تو دفعہ ۱۱ کے مطابق حاصل ہوتا ہے۔

لا = جم فہ، مآ = جب فہ ..... (۱)



اس لئے لا =۔ جب فم × فم ' لا =۔ جم فم × فم ' جب فم × فم  
(۲) ما = جم فم × فم ' ما =۔ جب فم × فم + جم فم × فم  
اور اسی طرح۔  
اب مسئلہ میکلوون سے

$$\left. \begin{aligned} لا &= لا + \frac{س}{۱} لا + \frac{س}{۲ \times ۱} لا + \dots \\ (۳) \dots & ما = ما + \frac{س}{۱} ما + \frac{س}{۲ \times ۱} ما + \dots \end{aligned} \right\}$$

جہاں کہ حرف کے لائق سے اسکی وہ قیمت ظاہر کی گئی ہے جو یہ  
س =۔ کے لئے اختیار کرتا ہے۔  
لیکن (۱) اور (۲) میں فم =۔ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\left. \begin{aligned} لا &= لا + \frac{س}{۱} لا + \frac{س}{۲} لا + \dots \\ (۴) \dots & ما = ما + \frac{س}{۱} ما + \frac{س}{۲} ما + \dots \end{aligned} \right\}$$

جہاں فرس کی بجائے  $\frac{۱}{س}$  لکھا گیا ہے۔

$$\left. \begin{aligned} پس لا &= س - \frac{س}{۶} + \dots + \frac{س}{۲} - \frac{س}{۶} فرس + \dots \\ (۵) \dots & جہاں س اور فرس مبادا پر قیمتیں ہیں۔ \end{aligned} \right\}$$

یہ ضوابط صفاری ہند سے کے اکثر سوالات میں مفید ثابت ہونگے۔

مثال (۱) نتیجہ (۵) میں دوسرے ضابطے سے ظاہر ہے کہ انتہا میں نقطہ ۴۹۷  
منفی کالمی دائرہ سے ہٹاؤ ہے

$$(۶) \dots \dots \dots \frac{۱}{۴} \frac{س}{۲} فرس$$

کیونکہ  $\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}}$  دائرہ کے لئے سفر ہے۔  
 اور عموماً ان تمام صورتوں میں جنہیں  $\frac{۳}{۲}$  نظر انداز ہو سکتا ہے منحنی کی بجائے  
 اسکا لینی دائرہ رکھا جاسکتا ہے۔  
**مثال ۲۔** نیز نقطہ ن کا عماد نقطہ و کے عماد کو ایسے نقطہ پر کاٹتا ہے  
 جسکا وہ فاصلہ  $\frac{۱}{۲}$  لا م فضا ہے۔ اگر ہم  $\frac{۳}{۲}$  میں دوسرے رتبہ کی  
 رقموں کو نظر انداز کر دیں تو

$$\frac{\text{لا م فضا}}{\frac{۳}{۲}} = \frac{\text{فرس}}{\frac{۳}{۲}} = \frac{\text{فرس}}{\frac{۳}{۲}} \left( ۱ + \frac{۱}{۲} \right) = \frac{\text{فرس}}{\frac{۳}{۲}} \left( \frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۲} \right) = \frac{\text{فرس}}{\frac{۳}{۲}} \left( \frac{۴}{۲} \right) = \frac{\text{فرس}}{\frac{۳}{۲}} \times ۲$$

پس نقطہ تقاطع کا نقطہ  $\frac{۳}{۲}$  کے مرکز انحناسے فاصلہ انتہا میں ہے

$$\frac{۱}{۲} \text{ فرس} \dots \dots \dots (۷)$$

اگر  $\frac{۳}{۲}$  کی قیمت اعظم یا قلیل ہے تو عموماً  $\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} = ۱$  اور فاصلہ اعلیٰ تر رتبہ کی  
 چھوٹی مقدار ہے اور برعکس پر  $\frac{۳}{۲}$  کا مثال نقطہ قرنی نقطہ ہے۔

## امثلہ نمبر ۶۲

پھیلاؤ

$$(۱) \quad \text{جمہل لا جم لا} = ۱ - \frac{\frac{۲}{۳} \text{ لا}^۲}{\frac{۳}{۲}} + \frac{\frac{۲}{۳} \text{ لا}^۲}{\frac{۳}{۲}} - \dots \dots \dots$$

$$\text{جینہ لا جب لا} = \frac{۲}{۳} \text{ لا}^۲ - \frac{\frac{۲}{۳} \text{ لا}^۲}{\frac{۳}{۲}} + \frac{\frac{۲}{۳} \text{ لا}^۲}{\frac{۳}{۲}} - \dots \dots \dots$$

$$(۲) \quad \text{جمہل لا جب لا} = \frac{۲}{۳} \text{ لا}^۲ - \frac{\frac{۲}{۳} \text{ لا}^۲}{\frac{۳}{۲}} + \frac{\frac{۲}{۳} \text{ لا}^۲}{\frac{۳}{۲}} - \dots \dots \dots$$

$$\dots\dots\dots + \frac{0^0 \text{ لا}^0}{5} - \frac{2^2 \text{ لا}^2}{3} - \text{لا} = \text{جنبل لا جم لا}$$

$$\dots\dots\dots + \frac{4^4 \text{ لا}^4}{2} + \frac{0^0 \text{ لا}^0}{5} - \frac{2^2 \text{ لا}^2}{4} - \frac{2^2 \text{ لا}^2}{3} - \text{لا} = 1 + \text{لا} = \text{فوجم لا} \quad (۳)$$

$$\dots\dots\dots + \frac{4^4 \text{ لا}^4}{4} - \frac{2^2 \text{ لا}^2}{6} - \frac{0^0 \text{ لا}^0}{5} - \frac{2^2 \text{ لا}^2}{3} + \text{لا} + \text{لا} = \text{فوجب لا}$$

$$\dots\dots\dots + \frac{6^6 \text{ لا}^6}{6} + \frac{5^5 \text{ لا}^5}{4} + \frac{2^2 \text{ لا}^2}{2} + 1 = \text{قط لا} \quad (۴)$$

$$\dots\dots\dots + \frac{7^7 \text{ لا}^7}{۴۵} + \frac{2^2 \text{ لا}^2}{۱۲} + \frac{2^2 \text{ لا}^2}{۲} = \text{لوک قط لا} \quad (۵)$$

$$\dots\dots\dots - \frac{1^1 \text{ لا}^1}{۴۵} + \frac{1^1 \text{ لا}^1}{۱۲} - \frac{1^1 \text{ لا}^1}{۲} = \text{لوک جمن لا} \quad (۶)$$

$$\dots\dots\dots + \frac{14^14 \text{ لا}^{14}}{۳۱۵} - \frac{2^2 \text{ لا}^2}{۱۵} + \frac{1^1 \text{ لا}^1}{۳} - \text{لا} = \text{منزل لا} \quad (۷)$$

$$\dots\dots\dots + \frac{5^5 \text{ لا}^5}{6} - \frac{2^2 \text{ لا}^2}{3} + \text{لا} = 1 - \text{لا} = \text{جم لا} \quad (۸)$$

$$\dots\dots\dots - \frac{ن(۲-ن۳)}{۲} + \frac{ن}{۲} - 1 = \text{جم لا} \quad (۹)$$

$$\dots\dots\dots - \frac{ن(۲-ن۵)}{۵۳} + \frac{ن}{۳} - 1 = \left( \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} \right) \quad (۱۰)$$

$$\dots\dots\dots + \frac{۱۴^14 \text{ لا}^{14}}{6} + \frac{2^2 \text{ لا}^2}{3} + 1 = \frac{\text{لا}}{\text{جب لا}} \quad (۱۱)$$

$$\dots\dots\dots - \frac{۱۴^14 \text{ لا}^{14}}{6} + \frac{2^2 \text{ لا}^2}{3} - 1 = \frac{\text{لا}}{\text{جنبل لا}}$$

$$\dots + \frac{لا^2}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{لا^2}{2} \cdot \frac{1}{4} + لا \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{لا}{1-فو} \quad (۱۲)$$

$$\dots + \frac{لا^4}{3} + \frac{لا^2}{4} + لا \cdot 2 + لا \cdot 2 + 1 = (لا + \frac{\pi}{3}) \text{ سر} \quad (۱۳)$$

$$\dots + \frac{لا^6}{3} + \frac{لا^4}{3} + لا \cdot 2 = (لا + \frac{\pi}{3}) \text{ لوک سر} \quad (۱۴)$$

$$\dots - \frac{لا^6}{24} + \frac{لا^4}{12} - \frac{لا^2}{6} + \frac{لا^2}{2} - لا = (لا \text{ جب لا}) \text{ لوک سر} \quad (۱۵)$$

$$\dots + \frac{لا^8}{144} - \frac{لا^6}{8} + لا \cdot \frac{1}{2} + 2 = \text{لوک (۱+فو)} \quad (۱۶)$$

$$\dots + \frac{لا^8}{180} - لا = \frac{3 \text{ جب لا}}{2 \text{ جم لا}} \quad (۱۷)$$

$$\times \frac{5 \times 3 \times 1}{4 \times 2 \times 2} + \frac{3 \times 1}{3} \text{ جب ط} = \frac{1}{2 \times 2} \text{ جب ط} = \frac{1}{2} \text{ لوک قط} \quad (۱۸)$$

$$\dots + \frac{\text{جب ط}}{4}$$

$$\text{اگر عف} = \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} \text{ تو ثابت کرو کہ} \quad (۱۹)$$

$$\text{عف} \text{ لا جم عا} \text{ جم (لا جب عا)} = \text{فو} \text{ لا جم عا} \text{ جم (لا جب عا + ن عا)}$$

$$\text{پس مائل کرو کہ فو لا جم عا} \text{ جم (لا جب عا)} = 1 + \text{لا جم عا}$$

$$\dots + \frac{لا^2}{2} \text{ جم عا} + \frac{لا^2}{2} \text{ جم عا} +$$

$$\text{تفاعلات لا لا} - \frac{لا^2}{2} - لا - \frac{لا^2}{3} + \frac{لا^2}{5} \text{ کی ترتیبیں کھینچو} \quad (۲۰)$$

اور انکا جب لا کی ترسیم سے مقابلہ کرو۔

(۲۱) تفاعلات  $1 - \frac{(لا)^۲}{۲} - 1 - \frac{(لا)^۲}{۲} + \frac{(لا)^۲}{۲}$  کی ترسیمیں کھینچو اور انکا  
جم لا کی ترسیم سے مقابلہ کرو۔

(۲۲) ثابت کرو کہ دفعہ ۱۸۵ کے ضابطہ (۱۷) میں طما کی انتہائی قیمت  
جبکہ ۵ کو بے حد چھوٹا کر دیا جائے عموماً  $\frac{۱}{۱+۵}$  ہے۔

(۲۳) ثابت کرو کہ اگر ۵ کافی چھوٹا ہے تو سپین کے تقریبی تحمل کے ضابطہ (۲۴۵)  
میں [دفعہ ۱۸۷ (۸)] خطاً تقریباً  $\frac{۱}{۹} ۵$  فرما ہے۔

(۲۴) ثابت کرو کہ فضا (لا) کی اوسط قیمت حدود  $لا = ۱ - ۵$  اور  
 $لا = ۵ + ۱$  کے درمیان ہے

$$فضا(۱) + \frac{۵}{۳} فضا(۱) + \frac{۵}{۵} فضا(۱) + \dots$$

نیز ثابت کرو کہ یہ قیمت حدود کی قیمتوں کے حسابی اوسط سے بقدر ذیل  
کم ہوگی

$$\frac{۵}{۳ \times ۱} فضا(۱) + \frac{۵}{۵ \times ۳} فضا(۱) + \frac{۵}{۷ \times ۵} فضا(۱) + \dots$$

(۲۵) ایک بے ہویے منحنی سے دوسرا منحنی اس طرح بنایا جاتا ہے کہ دوسرا  
منحنی کا معین لا کی کسی قیمت ۱ کے لئے حدود  $لا = ۱ \pm ۵$  ہیں پہلے  
منحنی کے معینوں کے اوسط کے مساوی ہے، یہاں ۵ مقررہ چھوٹی مقدار  
ہے۔ ثابت کرو کہ دوسرے منحنی کا معین پہلے منحنی کے معین سے اتنا بڑا ہے  
جتنا کہ قوس (جس کے حدود  $لا = ۱ \pm ۵$  ہیں) کے دھیل (Sagitta)

کا ایک تہائی ہے۔

## امثلہ ۶۳

## ہندسی استعمال

(۱) ثابت کرو کہ اگر دو دائروں کے پھیلاؤ (۴) کو س<sup>۱</sup> تک پھیلا یا جائے تو

$$\text{لا} = \text{س} - \frac{1}{4} \frac{\text{س}^2}{\text{ر}} + \frac{1}{8} \frac{\text{س}^3}{\text{ر}^2} - \frac{1}{16} \frac{\text{س}^4}{\text{ر}^3} + \dots$$

$$\text{ما} = \frac{1}{2} \frac{\text{س}^2}{\text{ر}} - \frac{1}{4} \frac{\text{س}^3}{\text{ر}^2} + \frac{1}{8} \frac{\text{س}^4}{\text{ر}^3} - \dots$$

$$- \frac{1}{24} \frac{\text{س}^4}{\text{ر}^3} + \dots \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\text{فرس}}{\text{ر}} \right)^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{\text{فرس}}{\text{ر}} \right)^3 + \dots \right]$$

(۲) اگر کسی منحنی کے نقطہ و پر مماس اور عماد کو لا محور اور ما محور بالترتیب مانا جائے اور منحنی کے کسی نقطہ لا<sup>۱</sup> ما کے محدودوں کو فضا کی زون میں جہاں فضا مماس کا لا محور کے ساتھ میلان ہے پھیلا یا جائے تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \text{س} \text{ فضا} + \frac{1}{2} \frac{\text{فرس} \text{ فضا}}{\text{فر فضا}} - \frac{1}{6} \left( \frac{\text{فرس}}{\text{فر فضا}} \right)^2 \text{ فضا} + \dots$$

$$\text{ما} = \frac{1}{2} \text{س} \text{ فضا} + \frac{1}{6} \frac{\text{فرس} \text{ فضا}}{\text{فر فضا}} + \dots$$

(۳) ثابت کرو کہ گذشتہ سوال کے محور دن کے مطابق مرکز انحناء کے محدود ذیل سے ما مل ہوئے

$$\text{لا} = - \frac{1}{2} \frac{\text{فرس} \text{ فضا}}{\text{فر فضا}} - \frac{1}{6} \frac{\text{فرس}^2 \text{ فضا}}{\text{فر فضا}^2} + \dots$$

$$\text{ما} = \text{س} + \frac{1}{6} \frac{\text{فرس} \text{ فضا}}{\text{فر فضا}} + \frac{1}{24} \frac{\text{فرس}^2 \text{ فضا}}{\text{فر فضا}^2} + \dots$$

(۴) اگر و اور ن منحنی کے دو متصل نقطے ہوں اور ن ق و ن پر

عمود کھینچا جائے اس طرح کہ وہ نقطہ و پر کے عماد کو ق پر ملے تو ثابت کرو کہ انتہائیں و ق =  $\frac{1}{2}$ ۔

(۵) اگر منحنی کی قوس برون چھوٹی سی قوس لی جائے اور و ت نقطہ و کے ماس پر چھوٹا سا فاصلہ ہو اور اگر ت ت ممدودہ نقطہ و کے عماد سے انتہائیں ج پر ملے تو ثابت کرو کہ و ج =  $\frac{1}{3}$ ۔

(۶) اگر ن ق منحنی پر دو متصل نقطے ہوں اور نقطہ ن کے ماس پر ت ایسا نقطہ لیا جائے کہ ن ت = وتر ن ق اور ت ق نقطہ ن کے عماد کو ج پر کاٹے تو ثابت کرو کہ ن ج کی انتہائی قیمت  $\frac{1}{4}$  ہوگی۔

(۷) ثابت کرو کہ وتر و ن کا وسطی عمود و پر کے عماد کو ایسے نقطہ پر کاٹتا جس کا مرکز انحنائے انتہائی فاصلہ  $\frac{1}{16}$  سے  $\frac{1}{8}$  فرس ہے جہاں سے و ن منحنی کے دو متصل نقطوں ن ق کے ماس ت پر قطع کرتے ہیں اور و وتر ن ق کا وسطی نقطہ ہے ثابت کرو کہ ت و منحنی کے عماد سے زاویہ مس<sup>۱</sup> ( $\frac{1}{16}$  فرس) بناتا ہے۔

(۸) ثابت کرو کہ اگر ن ق منحنی کی ایک چھوٹی قوس ہے تو وتر کے مقابلہ میں قوس بقدر  $\frac{1}{16}$  سے  $\frac{3}{16}$  کے بڑی ہے اور ن اور ق پر کے ماسوں کے طولوں کا حامل جمع قوس سے بقدر  $\frac{1}{16}$  سے  $\frac{3}{16}$  بڑا ہے۔

(۹) ثابت کرو کہ نقطہ قرن کے قریب منحنی کی شکل تقریباً  $\frac{1}{4}$  ما = لا سے ظاہر ہو سکتی ہے جہاں  $1 = \frac{9}{8}$  فرس۔

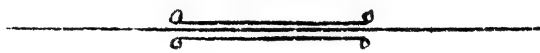
(۱۰) ثابت کرو کہ نقطہ عطف کے قریب منحنی کی شکل تقریباً  $\frac{1}{4}$  فرس =  $\frac{1}{4}$  فرج۔

سے ظاہر ہو سکتی ہے جہاں ج انحنائی قدر ہے۔  
 (۱۳) ثابت کرو کہ اگر ن منحنی کا کوئی نقطہ ہے تو ن کے قریب کے حصہ  
 کے برہمنچہ کی شکل (جبکہ نقطہ ن کا مرکز انحنائی ہے)

$$1 = \frac{1}{2} = 1 \text{ جہاں } 1 = \frac{1}{2} \text{ فرما}$$

(۱۳) ثابت کرو کہ اگر ن اقل یا اعظم انحنائی کا نقطہ ہو تو برہمنچہ کی شکل تقبیہاً  
 $1 = \frac{1}{2} = 1$

$$1 = \frac{1}{2} = 1 \text{ جہاں } 1 = \frac{1}{2} \text{ فرما}$$





# سولھواں باب

## متعدد متبوع متغیروں کے تفاعل

(۵۰۱)

۱۹۲۔ مختلف رتبوں کے جزوی مشتقات :- اگر ع  
دو یا زیادہ متبوع متغیروں لا، ما، ..... کا تفاعل ہو تو جزوی مشتقات

جفع، جفع ..... (۱)  
جفع لا، جفع ما  
بھی عموماً لا، ما، ..... کے تفاعل ہونگے اور ان متغیروں کے لحاظ سے  
انکا تفرق نکالا جاسکتا ہے۔ پس اگر  
ع = فعا (لا، ما) ..... (۲)  
تو دوسرے رتبہ کے جزوی مشتقات بنائے جاسکتے ہیں

جفع (جفع ع)، جفع (جفع ع)، جفع (جفع ع)، جفع (جفع ع)  
جفع لا (جفع لا)، جفع ما (جفع لا)، جفع لا (جفع ما)، جفع ما (جفع ما)  
اور انہیں اکثر اس طرح لکھا جاتا ہے

جفع ع، جفع ع، جفع ع، جفع ع ..... (۳)  
جفع لا، جفع ما، جفع لا، جفع لا، جفع ما، جفع ما  
اس میں ظاہر ہو گا کہ دوسری اور تیسری علامتوں میں معنی کا اصولی فرق  
ہے، دونوں صورتوں میں دو عمل مختلف ترتیب میں یکے بعد دیگرے

استعمال کئے جاتے ہیں۔ تاہم دفعہ ۱۹۳ میں ثابت کیا جائیگا کہ چند شرائط کے ماتحت جو عملی سوالات میں عموماً پوری ہوتی ہیں دونوں نتائج ایک دوسرے کے متماثل ماسدی ہیں۔ تفاعل فہا (لا، ما) کے پہلے جزوی مشتقات کو بعض موقعوں پر

$$\text{فہا (لا، ما) اور فہا (لا، ما)} \dots \dots \dots (۴)$$

سے تعبیر کیا جائیگا۔ اور دوسرے رتبہ کے مشتقات (۳) کو

$$\text{فہا (لا، ما)، فہا (لا، ما)، فہا (لا، ما)، فہا (لا، ما) سے} \dots (۵)$$

انکو اکثر برائے اختصار بالترتیب

$$\text{فہا، فہا} \dots \dots \dots (۶)$$

$$\text{اور فہا، فہا، فہا، فہا} \dots \dots \dots (۷)$$

لکھا جاتا ہے۔

$$\text{مثال ۱۔ اگر } \epsilon = \text{لا، ما} \dots \dots \dots (۸)$$

$$\text{تو جف } \epsilon = \text{م لا، ما}^1 \text{، جف } \epsilon = \text{ن لا، ما}^1 \dots \dots \dots (۹)$$

$$\text{جف } \epsilon = \text{م (م-۱) لا، ما}^2 \text{، جف } \epsilon = \text{ن (ن-۱) لا، ما}^2 \dots$$

$$\text{جف } \epsilon = \text{م (م-۱) لا، ما}^1 \text{، جف } \epsilon = \text{ن (ن-۱) لا، ما}^1 \dots \dots \dots (۱۰)$$

$$\text{مثال ۲۔ اگر ہی = و مس}^1 \text{، ما}^1 \dots \dots \dots (۱۱)$$

$$\text{تو جفی} = \text{و ما}^1 \text{، جفی} = \text{و لا}^1 \dots \dots \dots (۱۲)$$

$$\begin{aligned} \text{جف}^2 \text{ی} &= \frac{2 \text{لا} \text{ما}^2}{\text{جف}^2 \text{ی}} = \frac{2 \text{لا} \text{ما}^2}{\text{جف}^2 \text{ی}} \\ \text{جف}^2 \text{ی} &= \frac{2 \text{لا} \text{ما}^2}{\text{جف}^2 \text{ی}} = \frac{2 \text{لا} \text{ما}^2}{\text{جف}^2 \text{ی}} \\ \text{جف}^2 \text{ی} &= \frac{2 \text{لا} \text{ما}^2}{\text{جف}^2 \text{ی}} = \frac{2 \text{لا} \text{ما}^2}{\text{جف}^2 \text{ی}} \end{aligned}$$

۱۹۳۔ خاصیت میا دلہ کا ثبوت -

فرض کرو کہ  $ع = ف (لا، ما)$  ..... (۱)

اور تعلقات  $ع = \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف}^2 \text{ی}} = \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف}^2 \text{ی}}$  ..... (۲)

وجود رکھتے ہیں اور تغیرات کے محدود احاطہ میں جنہیں زیر غور قیمتیں شریک ہیں تسلسل ہیں۔ ہم ثابت کریں گے کہ ان شرائط کے ماتحت

$$\text{جف}^2 \text{ی} = \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف}^2 \text{ی}} = \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف}^2 \text{ی}} \quad (۳)$$

اس مقصد کے لئے ذیل کی کسر پر غور کرو

$$\text{خدا (ھ، گ)} = \frac{\text{ف (لا، ما، گ)} - \text{ف (لا، ما، گ)} - \text{ف (لا، ما، گ)} + \text{ف (لا، ما، گ)}}{\text{ھ، گ}}$$

اس میں لا اور ما کو ثابت مانا گیا ہے لیکن ھ، گ کو آخر میں لا انتہا چھوٹا بنا دیا جائیگا۔  
کچھ دیر کے لئے فرض کرو کہ

$$\text{ف (لا)} = \text{ف (لا، ما، گ)} - \text{ف (لا، ما، گ)} \quad (۵)$$

دفعہ ۵۶ (۹) کے مسئلہ اوسط قیمت سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف (لا، ما، گ)} = \text{ف (لا، ما، گ)} + \text{ف (لا، ما، گ)} \quad (۶)$$

اس میں ف (لا، ما، گ) کی قیمت درج کرنے سے

{فہ (لا + ہ' ما + گ) - فہ (لا + ہ' ما)} - {فہ (لا + ہ' ما + گ) - فہ (لا + ہ' ما)}

= {فہ (لا + طہ + ہ' ما + گ) - فہ (لا + طہ + ہ' ما)} - {فہ (لا + طہ + ہ' ما + گ) - فہ (لا + طہ + ہ' ما)} (۷)

جہاں ۱ < طہ < ۷ اور اس عمل میں ما کی قیمت میں کچھ تغیر نہیں کیا گیا۔ (۵۰۳)

پس خہ (ہ' گ) = فہ (لا + طہ + ہ' ما + گ) - فہ (لا + طہ + ہ' ما) (۸)

ک

اب اگر لکھا جائے

ف (ما) = فہ (لا + طہ + ہ' ما) ..... (۹)

تو مذکور بالا مسئلہ کے مکرر استعمال سے

ف (ما + گ) - ف (ما) = گ ف (ما + طہ + گ) ..... (۱۰)

یعنی فہ (لا + طہ + ہ' ما + گ) - فہ (لا + طہ + ہ' ما)

= گ فہ (لا + طہ + ہ' ما + طہ + گ) ..... (۱۱)

اس لئے خہ (ہ' گ) = فہ (لا + طہ + ہ' ما + طہ + گ) ..... (۱۲)

جہاں طہ + طہ + صفر اور ایک کے درمیان واقع ہیں۔

بالکل اسی طرح ثابت کر سکتے ہیں کہ

خہ (ہ' گ) = فہ (لا + طہ + ہ' ما + طہ + گ) ..... (۱۳)

جہاں طہ + طہ + صفر اور ایک کے درمیان ہیں۔

یہ نتائج ٹھیک ہیں بشرطیکہ لا + ہ' ما + گ تغیروں کے اس احاطہ میں واقع ہوں جس کے بارے میں مذکورہ بالا شرائط بیان کی گئی ہیں۔

اب اگر ہ اور گ کو لا انتہا چھوٹا بنا دیا جائے تو (۱۲) اور (۱۳) کا مقابلہ کرنے سے اور مشتقات کے تسلسل کی رو سے ظاہر ہے کہ

فہ (لا' ما) = فہ (لا' ما) ..... (۱۴)

اور یہی ثابت بھی کرنا تھا۔

اوپر کے مسئلہ سے اخذ ہوتا ہے کہ متبوع متغیروں (لا' ما' ہی) ... کی کسی تعداد کے تغاغل کی صورت میں غل

جف ، جف ، جف ، جف  
جف لا جف ما جف ہی

یا جن کو انحصار کے لئے عف ، عف ، عف ، عفی ..... سے

ظاہر کیا جاسکتا ہے عموماً مبادلہ میں یعنی ان میں سے کتنے ہی  
عملوں کا نتیجہ غل کی ترتیب پر منحصر نہیں ہے۔

مثلاً عف عف عفی ع = عف (عف عفی ع)

= عفی (عف عفی ع) = عفی عفی عفی ع

= عفی عفی عفی = وغیرہ وغیرہ نتیجہ (۴) سے ظاہر ہے کہ

(۱۵۰۴)

نہا نہا (ہ' گ) = ا نہا نہا (لا' ہ' ما' گ) - نہا (لا' ما' گ)

ا نہا نہا (لا' ہ' ما' گ) - نہا (لا' ما' گ)

= نہا (لا' ما' گ) - نہا (لا' ما' گ) ..... (۱۵)

ک

\* غالباً ثبوت اوسین لونٹ (Ossian Bonnet) کا دیا ہوا ہے۔  
اس کا متبادل ثبوت دفعہ ۱۹۴ میں دیا جائیگا۔

پس نہا نہا خما (ھ'ک) = فہا (لا'ما) ... (۱۶)  
 اسی طرح حاصل ہو سکتا ہے

نہا نہا خما (ھ'ک) = فہا (لا'ما) ... (۱۷)  
 پس اگر ہم فرض کر سکتے ہیں کہ کسر (۳) کی انتہائی قیمت جبکہ ھ اور ک کو  
 لا انتہا چھوٹا کر دیا جاتا ہے یگانہ ہے اور ھ'ک کے سفر ہونے کی ترتیب  
 پر منحصر نہیں ہے تو مسئلہ (۳) فوراً حاصل ہوتا ہے۔ لیکن ایک آسان مثال  
 سے ظاہر ہو جائیگا کہ ہر صورت میں بغیر فرید غور کے یہ فرض کر لینا صحیح نہیں ہے۔  
 اگر ف (ھ'ک) =  $\frac{ھ'ک}{ھ+ک}$

تو نہا نہا ف (ھ'ک) = ۱ - اور نہا نہا ف (ھ'ک) = ۱  
 مثال: م فر لا + ن فر ما = ... (۱۸)  
 کے ٹھیک تقریبی ہونے کی ضروری شرط دفعہ ۱۵۵ کے مطابق ہے

جف م =  $\frac{جف ن}{جف لا}$  ... (۱۹)  
 کیونکہ اگر جملہ (۱۸) فرع کے مساوی ہو تو

م =  $\frac{جف ۶}{جف لا}$  اور ن =  $\frac{جف ۶}{جف ما}$  ... (۲۰)  
 اور اس لئے (۱۹) کے دونوں جزوی تفرقات میں سے ہر ایک

جف ۶ یا جف لا جف ما  
 کے مساوی ہے۔ اس مسئلہ کے عکس کے طور پر ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر شرط (۱۹) صحیح ہے تو جملہ  
 (۱۸) ٹھیک تقریبی ہوگا۔

فرض کرو کہ و تفاعل می م فر لا کو جمیں مکمل، ما کو مستقل ماکر نکالا گیا ہے ظاہر کرتا ہے

اس لئے 
$$\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} = \text{م} \dots \dots \dots (۲۱)$$

اور 
$$\frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف م}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا جف ما}}$$

یعنی 
$$\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ن}} = \left( \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} - \text{ن} \right) \dots \dots \dots (۲۲)$$

اب دفعہ ۵۶ کے مطابق اس سے ظاہر ہے کہ لا کے لحاظ سے ن -  $\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}$  مستقل ہے، یعنی صرت ما کا تفاعل ہے۔ اکی قیمت ف (ما) سے ظاہر ہو تو

$$\text{ن} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} + \text{ف (ما)} \dots \dots \dots (۲۲)$$

اب اگر ہم لکھیں 
$$\text{ع} = \text{و} + \text{ف (ما)} \dots \dots \dots (۲۳)$$
 تو نتائج (۲۱) اور (۲۳) سے ماصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \text{م اور } \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = \text{ن} \dots \dots \dots (۲۵)$$

اور اس لئے م فر لا + ن فر ما = فر ع  $\dots \dots \dots (۲۶)$

۱۹۲۔ ٹیلر کے مسئلہ کی توسیع :-

فرض کرو کہ ف (لا، ما) متغیروں لا اور ما کا ایسا تفاعل ہے جو تغیریوں کی زیر غور قیمتوں کے لئے مسلسل ہے اور کسی خاص ذنبہ تک اس کے مشتقات بھی مسلسل ہیں اور

ف (لا + ہ، ب + گ)  $\dots \dots \dots (۱)$  کا پھیلاؤ ہ اور گ کی صعودی قوتوں میں درکار ہے۔ پہلے ہم ہ اور گ

میں دوسرے درجے کی رقموں تک پھیلاؤ کے حاصل کرنے کے سیدھے طریقے کو بیان کر چکے ہیں۔ یہ پہلے مسئلہ ٹیلر کی رو سے ہ کی قوتوں میں پھیلاؤ کے

$$\text{فہا} (1 + \text{ہ} + \text{ب} + \text{ک}) = \text{فہا} (1 + \text{ب} + \text{ک}) + \text{فہا} (1 + \text{ب} + \text{ک}) + \text{فہا} (1 + \text{ب} + \text{ک})$$

$$+ \frac{\text{ہ}^2}{2} \text{فہا} (1 + \text{ب} + \text{ک}) + \dots (2)$$

نیز اسی مسئلہ سے

$$\left[ \begin{aligned} \text{فہا} (1 + \text{ب} + \text{ک}) &= \text{فہا} (1 + \text{ب} + \text{ک}) + \text{فہا} (1 + \text{ب} + \text{ک}) + \dots \\ \text{فہا} (1 + \text{ب} + \text{ک}) &= \text{فہا} (1 + \text{ب} + \text{ک}) + \text{فہا} (1 + \text{ب} + \text{ک}) + \dots \\ \text{فہا} (1 + \text{ب} + \text{ک}) &= \text{فہا} (1 + \text{ب} + \text{ک}) + \dots \end{aligned} \right] (3)$$

(۳) کے نتائج کو (۲) میں درج کرنے سے

$$\text{فہا} (1 + \text{ہ} + \text{ب} + \text{ک}) = \text{فہا} (1 + \text{ب} + \text{ک}) + \{ \text{فہا} (1 + \text{ب} + \text{ک}) + \text{فہا} (1 + \text{ب} + \text{ک}) \}$$

$$+ \frac{1}{2} \{ \text{فہا} (1 + \text{ب} + \text{ک}) + \text{فہا} (1 + \text{ب} + \text{ک}) + \text{فہا} (1 + \text{ب} + \text{ک}) \} + \dots (4)$$

اگر ہم ابتدائی پھیلاؤ میں دفعہ ۱۰۵ کے مطابق مختلف باقی رقموں کی شکل پر

غور کریں تو ظاہر ہے کہ (۴) کی باقی رقم ذیل کے نمونہ کی ہوگی

$$\frac{1}{12} \{ \text{ب} + \text{ہ} + 3\text{ب} + \text{ہ} + 3\text{ب} + \text{ہ} + 3\text{ب} + \text{ہ} + 3\text{ب} + \text{ہ} \} \dots (5)$$

جہاں  $\text{ب}$ ،  $\text{ہ}$ ،  $\text{ک}$  ایسے تفاعل ہیں  $1 + \text{ب} + \text{ہ} + \text{ک}$  کے جوہر اور  $\text{ک}$  کو لا انتہا چھوٹے کرنے پر نحوہ درہتے ہیں پس باقی  $\text{ہ}$ ،  $\text{ب}$ ،  $\text{ک}$  میں تیسرے تہہ

مذکورہ بالا نتیجہ کی صداقت کی شرائط یہ ہیں کہ  $\text{فہا} (1 + \text{ب} + \text{ک})$  اور اس کے تیسرے رتبہ تک کے مشتقات تغیرات کی زیر غور تمام قیمتوں کے لئے



سلسل ہیں۔ نتیجہ (۴) کو ذرا مختلف ترقیم میں ذیل کی طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{فہا} (\text{لا} + \text{ط} + \text{ما} + \text{ک}) = \text{فہا} (\text{لا} + \text{ما}) + (\text{ھ} \text{جف} \text{فہا} + \text{ک} \text{جف} \text{فہا}) \frac{\text{جف} \text{فہا}}{\text{جف} \text{فہا}}$$

$$+ \frac{1}{2} (\text{ھ} \text{جف} \text{فہا} + \text{ک} \text{جف} \text{فہا}) \frac{\text{جف} \text{فہا}}{\text{جف} \text{فہا}} + \frac{\text{ک} \text{جف} \text{فہا}}{\text{جف} \text{فہا}} + \dots (۶)$$

جہاں بائیں جانب اختصار کے لئے فہا (لا + ما) کی بجائے صرف فہا لکھا گیا ہے۔ اس سے بھی زیادہ مختصر شکل یہ ہے

$$\text{فہا} (\text{لا} + \text{ھ} + \text{ما} + \text{ک}) = \text{فہا} (\text{لا} + \text{ما}) + (\text{ھ} \text{فہا} + \text{ک} \text{فہا})$$

$$+ \frac{1}{2} (\text{ھ} \text{فہا} + \text{ک} \text{فہا}) \frac{\text{فہا}}{\text{فہا}} + \dots (۷)$$

نیز اگر متبوع متغیروں لا اور ما کا کوئی تفاعل ہو اور دفعہ ۵ کے مطابق متغیروں میں مف لا، مف ما کے اضافہ کی وجہ سے ۶ میں مف ۶ کا اضافہ ہو تو ضابطہ (۷) ذیل کے معادل ہے

$$\text{مف} ۶ = \frac{\text{جف} ۶}{\text{جف} \text{لا}} \text{مف} \text{لا} + \frac{\text{جف} ۶}{\text{جف} \text{ما}} \text{مف} \text{ما}$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{جف} ۶}{\text{جف} \text{لا}} (\text{مف} \text{لا}) + \frac{\text{جف} ۶}{\text{جف} \text{ما}} (\text{مف} \text{ما}) + \frac{\text{جف} ۶}{\text{جف} \text{ما}} (\text{مف} \text{لا}) \right] + \dots$$

(۸)

اس امر پر توجہ ڈالنا مناسب ہوگا کہ (۴) کے ثبوت میں

$$\text{فہا} (\text{لا} + \text{ب}) = \text{فہا} (\text{لا} + \text{ب}) \dots (۹)$$

کے فرض کرنے کی ضرورت نہیں ہوئی۔ اگر ہم نے (۱) کے پھیلاؤ کو ھ کی بجائے پہلے ک کی قوتوں میں

بدان صورتوں میں جن میں تین یا زیادہ متبوع متغیر شریک ہوں اس دفعہ کی تحقیقاتی توسیع بالکل عیاں ہے

پھیلا یا ہوتا تو (۴) کے مائل نتیجہ حاصل ہوتا لیکن اس میں فہا (۱'ب) کی بجائے فہا (۱'ب) نمودار ہوتا۔ ان دو شکلوں کے مقابلہ سے دفعہ ۱۹۳ کے مسئلہ کا ایک مختلف ثبوت حاصل ہو جاتا ہے۔

۱۹۵۔ پھیلاؤ میں عام رقم :- پھیلاؤ (د) میں عام رقم دریافت کرنے کے لئے ایک مختلف طریقہ ذیل میں درج ہے۔

فرض کرو کہ  $ھ = عمت$ ،  $گ = بہات$  اور

فأ (ت) = فہا (لا + ھ + ما + گ) = فہا (لا + عمت + ما + بہات) .. (۱)  
اس کو ت کا تقابل فرض کر کے میلکورن کے مسئلہ سے پھیلا یا جاسکتا ہے اور اصلی عام رقم ہوگی

ت<sup>(۱)</sup> فأ<sup>(۱)</sup> (۰) ..... (۲)

اب اگر تھوڑی دیر کے لئے ہم لا + عمت = ع اور ما + بہات = و فرض کریں تو

$$\begin{aligned} \frac{\text{جف فہا}}{\text{جف لا}} &= \frac{\text{جف فہا جف ع}}{\text{جف ع جف لا}} = \frac{\text{جف فہا}}{\text{جف ع}} \\ \frac{\text{جف فہا}}{\text{جف ما}} &= \frac{\text{جف فہا جف و}}{\text{جف و جف ما}} = \frac{\text{جف فہا}}{\text{جف و}} \end{aligned}$$

جس میں فہا (ع، و) کی بجائے صرف فہا لکھا گیا ہے۔

$$\text{اس لئے فأ (ت) = جف فہا جف ع + جف فہا جف و}$$

$$= عا \frac{\text{جف فہا}}{\text{جف لا}} + بہا \frac{\text{جف فہا}}{\text{جف ما}} = عا \left( \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{بہا جف}}{\text{جف ما}} \right) فہا (ع، و)$$

(۴) .....

آخری نتیجہ صریحاً اور و کا تفاعل ہے اور اوپر کی دلائل کے مکرر استعمال سے

$$\text{فا (ت)} = \left( \text{عما} \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{بہا} \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} \right) \left( \text{جف لا} \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{بہا} \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} \right) \text{فما (ع' ف)}$$

$$= \left( \text{عما} \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{بہا} \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} \right) \text{فما (ع' ف)} \dots (۵)$$

$$\text{اور عموماً فا (ت)} = \left( \text{عما} \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{بہا} \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} \right) \text{فما (ع' ف)} \dots (۶)$$

$$\text{جہاں کہ عامل (عما} \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{بہا} \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} \text{) کو عاملات} \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}$$

اور جف ما کی خاصیت مبادل کی وجہ سے مسئلہ ثنائی سے پھیلا یا جاسکتا

ہے۔ چونکہ ت صرف مرکبات لا + عما ت اور ما + بہا ت میں نمودار

ہوتا ہے اس لئے ظاہر ہے کہ (۶) میں بائیں جانب کے تفرقوں

کے عمل سے پہلے یا بعد ت = رکھنے سے کوئی فرق نہیں پڑتا۔

اس لئے پھیلاؤ میں عام رقم ہوگی

$$\frac{\text{ت}}{\text{ن}} \text{ فا (ت)} = \left( \text{عما} \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{بہا} \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} \right) \text{فما (لا' ما)}$$

$$= \frac{1}{\text{ن}} \left( \text{عما} \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{بہا} \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} \right) \text{فما (لا' ما)}$$

$$= \frac{1}{\text{ن}} \left[ \text{عما} \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{بہا} \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} \right] \text{فما (لا' ما)}$$

$$+ \frac{\text{ن (ن-۱)}}{۲ \times ۱} \text{ ع' ف} + \frac{\text{جف ت فما}}{\text{جف لا-۵ جف ما}} + \dots [ \dots (۷)$$

جہاں فدا (لا' ما) کی بجائے فدا لکھا گیا ہے۔

مثال :- ثابت کرو کہ اگر فدا (لا' ما) متغیر لا' ما کا درجہ م کا تجانس

تفاعل ہے تو لا فہا + ما فہا = م فہا ..... (۸)

اور لا فہا + ۲ لا ما فہا + ما فہا = م (م-۱) فہا .... (۹)

درجہ م کے متجانس تفاعل کی عام تعریف یہ ہے کہ اگر لا اور ما کو کسی نسبت مہا میں بدلا جائے تو تفاعل مہا کی نسبت میں بدل جاتا ہے۔

یعنی فہا (لا مہا، ما مہا) = مہا فہا (لا، ما) .... (۱۰)

اس مساوات میں مہا = ۱ + ت درج کرو۔ اب نتیجہ (۸) سے

فہا (لا، لا) = (ما، ما) ت = فہا (لا، ما)

+ ت (لا فہا + ما فہا) + ۱/۲ ت (لا فہا + ۲ لا ما فہا + ما فہا) + .....

اور مسئلہ ثنائی سے

(۱+ ت) فہا (لا، ما) = [۱+ ت + م (۱-۲) ت / ۲ × ۱ + ت + ...] فہا

ان دو نتیجوں میں ت اور ت کے سرور کو مساوی رکھنے سے ضابطہ (۹) اور (۱۰) حاصل ہو سکتے ہیں۔

عام طور پر ت کے سرور کو مساوی رکھنے سے اور پھر (۱) استعمال کرتے سے حاصل ہوتا ہے

لا جف فہا + ن لا جف فہا + ۱/۲ جف فہا (۱-ن) ت / ۲ × ۱ + لا جف فہا

جف فہا + ... = م (م-۱) (۱-۲) ت ... (م-ن) (۱+ن) فہا (۱۱)

یہ دو متبوع تغیروں کی صورت میں ”متجانس تفاعلوں کا مسئلہ“ ہے۔ تین یا زیادہ متبوع تغیروں کی صورت میں اسکی توسیع بالکل عیاں ہے۔

۱۹۶۔ دو تغیر و یک تفاعل کی قیل اور اہم قیمتیں اور انکی ہندسی تعبیر۔

مسئلہ ٹیکری تو وسیع شدہ شکل کی مدد سے ہم دفعہ ۵۳ کے مطابق دو متبوع متغیر لا، ما کے تفاعل ع کی اعظم اور اقل قیمتوں کی بحث کی توسیع کر سکتے ہیں۔ دفعہ ۱۹۴ (۸) سے ظاہر ہے کہ مف لا، مف ما کی مطلق قیمت کو مسلسل کم کیا جائے لیکن انکی نسبت کو مستقل رکھا جائے تو انتہائیں مف ع کی علامت وہی ہے جو فیل کی ہے

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} \text{ مف لا} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} \text{ مف ما} \dots \dots \dots (۱)$$

لیکن اگر  $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$  اور  $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$  دونوں صفر ہیں تو (۱) کی علامت مف لا اور مف ما کی علامت بدلنے سے بدل جاتی ہے۔ پس جب متغیر کے لئے مف ع مثبت ہوگا اور باقی کے لئے منفی۔ یہ الفاظ دیگر ع کی اعظم یا اقل قیمت صرف اس وقت ہوگی جبکہ ایکسا تھ

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = ۰ \text{ اور } \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = ۰ \dots \dots \dots (۲)$$

اب فرض کرو کہ شرط (۲) پوری ہوتی ہے تو

$$\text{مف ع} = \frac{۱}{۲} \left[ \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} (\text{مف لا}) + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} (\text{مف ما}) \right]$$

$$+ \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}^۲} (\text{مف ما})^۲ + \dots \dots \dots (۳)$$

اگر مف لا اور مف ما کافی چھوٹے ہیں تو مف ع کی علامت (۳) میں ۵۰۹ درج شدہ رقم پر ہی منحصر ہوگی اور اعلیٰ تر ترتیب کی رقموں کا کوئی اثر نہیں پڑے گا۔

دفعہ ۱۹۴ کی تحقیقات میں فرض کر لیا گیا ہے کہ دونوں مشتق مسلسل ہیں اور اسلئے محمد وہیں۔ یعنی اہم شروع ہی سے دفعہ ۵۱ میں غور کرو وہ صورت کی مشابہ دو ابعادی صورت کو خارج کر دیتے ہیں۔

اب علم الجبر ہے معلوم ہے کہ تنجاس درجہ دوم کے تفاعل

(۴) ..... (۲) طافا + ۲ طافا + جافا

کی علامت نا تغیر پذیر ہے صرف اگر

(ج) < ه> ..... (ه)

اور اس صورت میں جملہ کی علامت (یا جب کی علامت ہے۔

اس سے اخذ ہو سکتا ہے کہ جب شرط (۲) پوری ہو تو مف لا اور

امف ما اگسی قیمتوں کے لئے جو ایک احاطہ کے باہر نہ ہوں مف ۶  
کی علامت ایک ہی رہے گی بشرطیکہ

$$(4) \dots\dots\dots \left( \frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{ا} \text{ع}^2 \text{ا}} \right) < \frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{ا} \text{ع}^2 \text{ا}}$$

اور اس صورت میں صف ع کی علامت دی ہوگی جو  $\frac{\text{جفا}^2 \text{ع}}{\text{جفا}^2 \text{ع}}$  یا  $\frac{\text{جفا}^2 \text{ع}}{\text{جفا}^2 \text{ع}}$

کی ہے۔ اور عکس کی اعظم یا اقل قیمت  $\frac{\text{جفاء}}{\text{جفا لا}}$  کے منفی یا مثبت ہونے پر منحصر ہوگی۔

$$\frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{لا}} \text{جف}^{\text{لا}} \text{جف}^{\text{لا}}} > \left( \frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{لا}} \text{جف}^{\text{لا}} \text{جف}^{\text{لا}}} \right)^2 \dots \dots (4)$$

تو کسر  $\frac{\text{مف} \text{ ما}}{\text{مف} \text{ لا}}$  کی چند قیمتوں کے لئے عکا اضافہ مثبت ہو گا اور چند کے لئے منفی۔ اس لئے عک کی قیمت اگرچہ دفعہ ۵۱ کے مطابق مقیم ہے لیکن اعظم یا اقل نہیں ہے۔

$$(٨) \dots\dots\dots \left( \frac{\text{جفء جفء}}{\text{جفء جفء}} \right) = \frac{\text{جفء جفء}}{\text{جفء جفء}}$$

نو (۱۳) کی باتیں جانب کی تھیں مف لا اور مف ما میں ایک خطی  
جلد کے مرتب کے مثبت یا منفی کے مساوی ہیں اور اس کے لئے کسر

مف ما کی ایک خاص قیمت کے لئے یہ صفر ہوگی۔ اب چونکہ مف ع  
مف لا تیسرے رتبہ کی مقدار ہے اس لئے عموماً اعظم یا قائل قیمت نہیں ہوگی لیکن  
اس سوال کا قطعی فیصلہ پھیلاؤ کی فرید رقموں پر غور کر سکتے بغیر نہیں کیا جاسکتا۔  
اگر دوسرے رتبہ کے جزوی مشتق جف ا ع ، جف ا ع ، جف ا ع  
جف لا ، جف لا جف ما ، جف ما جف ما  
سب صفر ہوں تو اس صورت میں بھی یہی نتیجہ نکلتا ہے۔

مذکورہ بالا تحقیقات کی ہندسی تعبیر بہت دلچسپ ہے۔ اگر دفعہ  
۳۴ کے مطابق ہی سطح کا عمودی معین ہو اور لا ، ما افقی مستوی میں  
استطیلی محدود ہوں تو اعظم یا قائل بلندی والے نقطہ کے لئے پہلی شرط ہے

$$\frac{\text{جف ا ع}}{\text{جف لا}} = 0 \text{ اور } \frac{\text{جف ا ع}}{\text{جف ما}} = 0 \dots\dots\dots (۹)$$

چونکہ ان مساواتوں سے لازم ہو جاتا ہے کہ مف ا ع ، مف ا ع  
مف لا اور مف ما میں دوسرے رتبہ کی مقدار ہے اسلئے نتیجہ نکلا  
ہے کہ زیر غور نقطہ ن پر ہر عمودی تراش کا ماسی خط افقی ہو گا یعنی ماسی  
مستوی افقی ہوگا۔

اس کے بعد ہم غور کرنا ہے کہ آیا سطح نقطہ ن کے ماسی مستوی ۵۱  
کو کاٹتی ہے یا نہیں۔ اگر کوئی ایسا خط تقاطع ہے تو اس پر مف ا ع = ۰  
اور اگر (۳) میں مف ما = م مف لا درج کریں اور اتہا میں مف لا  
کو صفر کر دیں تو نقطہ ن پر یعنی تقاطع کے ماسی خطوط کی سمتیں ذیل سے  
حاصل ہوتی ہیں

$$\frac{\text{جف ا ع}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ا ع}}{\text{جف لا جف ما}} + \frac{\text{جف ا ع}}{\text{جف ما}} = 0 \dots\dots\dots (۱۰)$$

م میں اس دو درجی مساوات کی اصلیں خیالی ہوں گی اگر

$$\text{جف}^2 \text{ لا}^2 \text{ جف}^2 \text{ می} < \left( \frac{\text{جف}^2 \text{ می}}{\text{جف}^2 \text{ لا}^2 \text{ جف}^2 \text{ می}} \right) \dots \dots (11)$$

اس صورت میں ن کی عین قربت میں زیر غور سطح ماسی مستوی کے صرف ایک طرف واقع ہوگی اور ن پیر کا ہم ارتفاعی خط (Contour-line) صرف ایک نقطہ میں تحویل ہو جاتا ہے۔ اس لئے نقطہ ن پر بلندی کی اعظم قیمت یا اقل قیمت کا ہونا  $\frac{\text{جف}^2 \text{ می}}{\text{جف}^2 \text{ لا}^2 \text{ جف}^2 \text{ می}}$  اور  $\frac{\text{جف}^2 \text{ می}}{\text{جف}^2 \text{ لا}^2 \text{ جف}^2 \text{ می}}$  کے منفی

یا مثبت ہونے پر منحصر ہے یعنی دفعہ ۶ کے مطابق اعظم قیمت ہوگی اگر مستوی می لا اور می لا کے متوازی عمودی تراشیں اور پیر کی طرف محدب ہیں اور اقل قیمت اگر تراشیں مقعر ہیں۔ اگر لا اور لا محوروں کو ان کے مستویوں میں گھمایا جائے تو اخذ ہوتا ہے کہ اس صورت میں ن میں سے گزرنے والی ہر عمودی تراش اوپر کی طرف بالترتیب محدب یا مقعر ہوگی۔

$$\text{لیکن اگر } \frac{\text{جف}^2 \text{ می}}{\text{جف}^2 \text{ لا}^2 \text{ جف}^2 \text{ می}} > \left( \frac{\text{جف}^2 \text{ می}}{\text{جف}^2 \text{ لا}^2 \text{ جف}^2 \text{ می}} \right) \dots \dots (12)$$

تو مساوات (۱۰) کی اصلیں حقیقی اور جدا گانہ ہیں۔ ہم ارتفاعی خط پر نقطہ ن عقدہ ہے اور اسکی دو شاخیں سطح کو دو حصوں میں بانٹ دیتی ہیں، سطح کا ایک حصہ ماسی مستوی کے اوپر واقع ہوگا اور ایک حصہ نیچے۔

$$\text{اگر } \frac{\text{جف}^2 \text{ می}}{\text{جف}^2 \text{ لا}^2 \text{ جف}^2 \text{ می}} = \left( \frac{\text{جف}^2 \text{ می}}{\text{جف}^2 \text{ لا}^2 \text{ جف}^2 \text{ می}} \right) \dots \dots (13)$$

تو مساوات (۱۰) کی اصلیں حقیقی اور مساوی ہیں۔ ہم ارتفاعی خط پر نقطہ ن عموماً قرن نقطہ ہے اور اس سوال کا جواب کہ اس صورت میں ن کی بلندی اعظم ہے یا اقل، بغیر مزید تحقیق کے نہیں دیا جاسکتا۔

$$\text{مثال ۱۔ فرض کرو کہ می} = \text{لا}^2 - ۳ \text{ لا}^2 - ۴ \text{ لا}^2 + ۵ \text{ ج} \dots \dots (14)$$

$$\text{اس سے } \frac{\text{جف}^2 \text{ می}}{\text{جف}^2 \text{ لا}^2 \text{ جف}^2 \text{ می}} = ۳ \text{ لا}^2 - ۳ \text{ لا}^2 - ۳ \text{ لا}^2 + ۳ \text{ ج} = ۳ \text{ ج} \dots \dots (15)$$



اور جف<sup>ئی</sup> جف<sup>لا</sup> = ۶ (لا-ا) جف<sup>لا</sup> جف<sup>ما</sup> = جف<sup>ئی</sup> جف<sup>ما</sup> = ۸-ا- (۱۶)  
 شرط (۹) پوری ہوتی ہیں جبکہ لا = ۰، ما = ۰ یا لا = ۲، ا = ۰، اصلوں کا پہلا جوڑا اتساوات (۱۱) کو پورا کرتا ہے اور چونکہ جف<sup>ئی</sup> منفی ہے جف<sup>ما</sup> اس لئے اس نقطہ پر ہی کی غلظت قیمت ہے۔ اصلوں کا دوسرا جوڑا اتساوات (۱۲) کو پورا کرتا ہے اس لئے ہی کی غلظت یا اقل قیمت نہیں ہے۔ اس مثال کے ہم ارتقاعی خطوط جلد دوم صفحہ ۳۹۲ شکل ۶۹ میں دکھائے گئے ہیں۔

سوال ۲:۔ فرض کرو کہ جی = (لا+ما) - ۲ (لا+ما) + ج ..... (۱۷)

جف<sup>ئی</sup> جف<sup>لا</sup> = ۴ (لا+ما-ا) جف<sup>ئی</sup> جف<sup>ما</sup> = ۴ (لا+ما+ا) ..... (۱۸)  
 جف<sup>ئی</sup> جف<sup>لا</sup> = ۴ (۳+لا+ما-ا) جف<sup>ئی</sup> جف<sup>ما</sup> = ۸ (لا+ما) جف<sup>ئی</sup> جف<sup>ما</sup> = ۴ (۳+لا+ما+ا) ..... (۱۹)

اس صورت میں مساوات (۹) کی حقیقی صلیں یہ ہیں لا = ۰، ما = ۰۔ اور لا = ۰، ا = ۰۔ اصلوں کا پہلا جوڑا رشتہ (۱۲) کو پورا کرتا ہے اور اس لئے جی کی غلظت یا اقل قیمت اس نقطہ پر نہیں ہے۔ اصلوں کا دوسرا جوڑا لا = ۰، ا = ۰، ما = ۰ شرط (۱۱) کو پورا کرتا ہے اور چونکہ ان قیمتوں کے لئے جف<sup>ئی</sup> مثبت ہے اس لئے جی کی اقل قیمت ہوگی۔ سطح (۱۷) کے جف<sup>لا</sup> جف<sup>ما</sup>

ہم ارتقاعی خطوط جلد دوم صفحہ ۴۰۶ کی شکل ۱۰۶ میں دکھائے گئے ہیں سطح میں دو شاخ خلا ہیں اور ان کے درمیان ایک دُندا ہے اگر مساوات (۱۷) کی بائیں جانب کی علامت بدل دی جائے تو خلا کی بجائے سطح کی دو چوٹیاں ہوں گی اور ان کے درمیان گزر کاہ ہوگی۔

## ۱۹۷۔ مشروط تفاعلوں کی عظم اور اقل قیمتیں۔

سوال یہ ہے کہ اعظم اور اقل قیمتیں یعنی مقیم قیمتیں اسے تفاعل کی دریافت کیجائیں جو ن متغیروں کا تفاعل ہو لیکن اس کے تمام متغیر غیر تابع نہ ہوں بلکہ م معلومہ رشتوں سے وابستہ ہوں (ن < م) اقل اور اعظم کے امتیاز کرنے کے طریقہ پر اس دفعہ میں غور نہیں کیا جائیگا۔ ان مقیم قیمتوں میں اصولاً م معلومہ رشتوں کی مدد سے تفاعل میں سے م متغیروں کو ساقل کر سکتے ہیں اور تب تفاعل صرف (ن - م) مقبوع متغیروں کا تفاعل رہ جائے گا لیکن عملی طور پر یہ طریقہ اگر ناممکن نہ بھی ہو تو بھی بہت طویل ہوگا اس مشکل کو حل کرنے کے لئے غیر معین فسا ربوں کا طریقہ ابتدا میں لگراج نے دریافت کیا تھا۔ ان صورتوں میں جبکہ دیا ہوا تفاعل اور معلومہ رشتے متشاکل سے جملے ہیں یہ طریقہ از حد مفید ہے۔

ذیل کی مثالوں سے یہ طریقہ کافی طور پر واضح ہو جائیگا۔

(آ) فرض کرو کہ ع ایک تفاعل ہے

$$۶ = \text{فما} (\text{لا}، \text{ما}، \text{می}) \dots \dots \dots (۱)$$

جبکہ لا، ما، می رشتہ

$$\text{ف} (\text{لا}، \text{ما}، \text{می}) = ۰ \dots \dots \dots (۲)$$

سے وابستہ ہیں۔ اس امر سے کہ مف = ۶ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف فما}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فما}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف فما}}{\text{جف می}} = ۰ \dots (۳)$$

لا انتہا چھوٹے تغیرات مف لا، مف ما، مف می سب ایک دوسرے کے غیر تابع نہیں ہیں بلکہ ذیل کے رشتہ سے وابستہ ہیں

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف می}} = ۰ \dots (۴)$$

کیونکہ مف ف = ۰۔

ان نتائج میں سے مفہی کو باق کر سکتے ہیں۔ تب حاصل اسقاط  
میں مفہ لا، مفہ ما کو غیر تابع فرض کر سکتے ہیں اور ان کے سروں کو  
علیحدہ علیحدہ صفر رکھ سکتے ہیں۔ اس سے زیادہ متشاکل طریقہ یہ ہو گا کہ (۳)  
اور (۴) سے ذیل کی مساوات بنائی جائے

$$\left( \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{لہ}}{\text{جف لا}} \right) \left( \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{لہ}}{\text{جف لا}} \right) = \left( \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف فہ}} - \frac{\text{لہ}}{\text{جف فہ}} \right) \left( \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف فہ}} + \frac{\text{لہ}}{\text{جف فہ}} \right) \quad (۵)$$

اس وقت تک لہ کو کوئی بھی قیمت اختیار کر سکتا ہے۔ لیکن اب ہم فرض  
کرتے ہیں کہ لہ کی قیمت اس شرط سے دریافت کی جاتی ہے کہ ان  
محدود فرقوں میں سے ایک کا سر صفر ہو۔ فرض کرو کہ مفہ ہی کا سر  
صفر ہے۔ اب چونکہ مفہ لا اور مفہ ما میں کوئی لازمی تعلق نہیں ہے  
اس لئے ان کے سر بھی جدا گانہ صفر ہونگے۔ اس سے ذیل کی مساواتیں  
حاصل ہوتی ہیں

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{لہ}}{\text{جف لا}} \cdot \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف فہ}} = \frac{\text{لہ}}{\text{جف فہ}} \cdot \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف فہ}} = \frac{\text{لہ}}{\text{جف فہ}}$$

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{لہ}}{\text{جف فہ}} \quad (۶)$$

ان تین مساواتوں اور مساوات (۲) سے چار ہمزاد مساواتیں حاصل  
ہوتی ہیں جن سے چار غیر معلوم مقداریں، لا، ما، می، لہ دریافت  
ہو سکتے ہیں۔

$$(۶) \quad \text{فرض کرو کہ} \quad \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{لہ}}{\text{جف فہ}} \quad (۷)$$

$$(۸) \quad \text{جیکہ متغیرات ان دو فرقوں سے وابستہ ہیں}$$

فہ لا، ما، می، لہ اور فہ لا، ما، می، لہ  
مذکورہ بالا طریقہ پر عمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے



نیز ع کو ساخط کرنے سے

$$(۱۷) \dots\dots\dots (۱-ج) لا ما = (۱-لا) ما$$

$$(۱۸) \dots\dots\dots ع = لا + ما + ی$$

مثال (۲) کی قائم قیمتیں دریافت کرو جبکہ

$$(۱۹) \dots\dots\dots لا + ج + ما + ی = ۱$$

یہ سوال غروطنی ناسطخ کی مرکزی ستوی تراش کے صدر محاور دریافت کرنیکا ہے ہم حاصل کر سکتے ہیں

$$لا + لا + ما + ما + ی = لا + ج + ی$$

$$(۲۰) \dots\dots\dots + ما + ن$$

انہیں بالترتیب لا، ما، ی سے ضرب دیکر جمع کرنے سے

$$(۲۱) \dots\dots\dots ع = لا$$

$$(۲۲) \dots\dots\dots لا + ما + ی = ۱$$

لچس لا + ما + ی = ۱، ج + ما + ی = ۱، ج + ما + ی = ۱

انہیں بالترتیب ل، م، ن سے ضرب دیکر جمع کرنے سے

$$(۲۳) \dots\dots\dots لا + ما + ی = ۱$$

جو ع میں دو درجی مساوات ہے۔ اگر ع اسکی ایک اصل ہو تو لا: ما: ی نسبتوں کی حامل قیمتیں (۲۲) سے حاصل ہو سکتی ہیں

$$(۲۴) \dots\dots\dots لا: ما: ی = ۱: ۱: ۱$$

۱۹۸۔ لفاف :- گذشتہ دفعہ کے طریقہ کے بالکل مماثل

طریقہ ایسے منحنی کے لفاف دریافت کرنے میں استعمال ہو سکتا ہے جس کی مساوات میں ن متبادل ہیں جو (ن-۱) رشتوں سے وابستہ ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ فہا (لا، ما، عہا، بہا) = ..... (۱)  
 کا لفاف مطلوب ہے جبکہ عہا اور بہا رشتہ فہا (عہا، بہا) =  
 سے وابستہ ہیں۔ منہنی (۱) اور اس کے متصل منہنی کے مقام تقاطع پر  
 فہا (لا، ما، عہا + مف عہا، بہا + مف بہا) = فہا (لا، ما، عہا، بہا) =  
 (۳) .....

یعنی انتہا میں  $\frac{\text{جف فہا}}{\text{جف عہا}} + \frac{\text{مف عہا}}{\text{جف بہا}} + \frac{\text{جف فہا}}{\text{مف بہا}} =$  (۲)

اب تغیرات مف عہا اور مف بہا میں یہ رشتہ ہے

$\frac{\text{جف فہا}}{\text{جف عہا}} + \frac{\text{مف عہا}}{\text{جف بہا}} + \frac{\text{جف فہا}}{\text{مف بہا}} =$  ..... (۵)

اسلئے  $\left( \frac{\text{جف فہا}}{\text{جف عہا}} - \frac{\text{لا، جف فہا}}{\text{جف عہا}} \right) + \frac{\text{مف عہا}}{\text{جف بہا}} + \left( \frac{\text{جف فہا}}{\text{جف بہا}} \right)$

-  $\left( \frac{\text{لا، جف فہا}}{\text{جف بہا}} \right) + \frac{\text{مف بہا}}{\text{جف بہا}} =$  (۶)

اگر لہا کو ہم اس شرط سے دریافت کریں کہ مف بہا کا سر صفر ہو تو  
 ظاہر ہے کہ مف عہا کا سر بھی صفر ہوگا۔ تب

$\frac{\text{جف فہا}}{\text{جف عہا}} - \frac{\text{لا، جف فہا}}{\text{جف عہا}} + \frac{\text{جف فہا}}{\text{جف بہا}} - \frac{\text{لا، جف فہا}}{\text{جف بہا}} =$  (۷)

انتہائی نقاط تقاطع کے طریق کی مساوات (۱)، (۲) اور (۷) میں سے  
 عہا، بہا، لہا سا قہ کرنے سے حاصل ہو سکتی ہے۔

مثالی (۱) :- خط  $\frac{\text{لا}}{\text{عہا}} + \frac{\text{ما}}{\text{بہا}} = ۱$ ، ..... (۸)

کے لفاف کی مساوات دریافت کرو جبکہ

عہا + بہا = لہا ..... (۹)

اس طریقہ سے حاصل ہوتا ہے

$$(1) \dots \dots n_b \omega = \frac{b}{r_b} \omega = \frac{1}{r_b}$$

اس لئے  $1 = \frac{6}{3} + \frac{9}{6} = (2 + 1.5)$

(11) - .....  $\frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \infty$  یعنی

پس  $\text{عنا} = \text{لا} + \text{بہا} = \text{لا} + \text{ما}$  ..... (۱۲)  
 اس سے حاصل شدہ عنا اور بہا کی قیمتیں (۹) میں درج کرنے  
 سے  $\text{لا} + \text{ما} = \text{لا} + \text{بہا}$  (دیکھو دفعہ ۴۵ کی مثال ۲)۔

مثال ۲ :-  $a + b + c = 1$  ..... (۱۳)

ہمیں ان مساواتوں اور ذیل کی دو مساواتوں میں سے  $ع + ب + ج = ۱۴$  کو فقط کرنا ہے

لا = لہا (بہا + ل) ، ما = لہا (عہا + ج) ..... (۱۵)  
 لہا کو ساقط کرنے سے عہا - لا - بہا = ما - ج - لا  
 اسے (۱۳) کے ساتھ شریک کرنے سے

عماد =  $\frac{1}{4}$  (ارما - حب لا + ا) جہا ما =  $\frac{1}{4}$  (حب لا - ارما + ا) ... (۱۶)  
 عماد و جہا کی ان قیمتوں کو (۱۴) میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے  
 (حب لا - ارما) + ۴ ج لا + ۲ (ارما + حب لا) + ۱ = ... (۱۷)  
 جو مطلوب نفاذ کی مساوات ہے۔

۱۹۹۔ جزوی تفرق کے اطلاقات :- ہندسی اور ۵:۵

طبیعی سوالات میں جزوی تفرق کے متعدد مسئلے اکثر پیش آتے ہیں۔

بطور قاعدہ کے کہا جاسکتا ہے کہ جیسے یہ پیدا ہوں انکے حل پر غور کرنا مفید ہو گا۔ اب ہم ایک دو اسان صورتوں پر غور کریں گے جن سے چند ایسی باتیں واضح ہو جائیں گی جنکو ہمیشہ مد نظر رکھنا چاہیے۔ (آخر میں کرو کہ)

۶ = فم (و) ..... (۱)  
جہاں و مبتوع تفسیر لا، ما کا تفاعل ہے۔ اور فرض کرو کہ  
ع کے متواتر جزوی مشتقات بلحاظ لا، ما کے مطابق ہیں۔

$$\text{اب دفعہ ۳۲ سے } \frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} = \frac{\text{فم}^{\text{لا}}}{\text{جف}^{\text{و}}} \quad \frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}}$$

$$\text{جف}^{\text{ع}} = \frac{\text{فم}^{\text{لا}}}{\text{جف}^{\text{و}}} \quad \frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} \quad (۲) \dots \dots \dots$$

$$\text{نیز } \frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} = \left[ \frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} \right] \frac{\text{فم}^{\text{لا}}}{\text{جف}^{\text{و}}} + \frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} \frac{\text{فم}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}}$$

$$= \frac{\text{فم}^{\text{لا}}}{\text{جف}^{\text{و}}} \left( \frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} \right) + \frac{\text{فم}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} \left( \frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} \right)$$

(۳) - - - - -

$$\frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{لا}} \text{جف}^{\text{ما}}} = \left[ \frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} \right] \frac{\text{فم}^{\text{لا}}}{\text{جف}^{\text{و}}} + \frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} \frac{\text{فم}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}}$$

$$= \frac{\text{فم}^{\text{لا}}}{\text{جف}^{\text{و}}} \left( \frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} \right) + \frac{\text{فم}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} \left( \frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} \right) \dots (۴)$$

$$\frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ما}}} = \left[ \frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{ما}}} \right] \frac{\text{فم}^{\text{لا}}}{\text{جف}^{\text{و}}} + \frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{ما}}} \frac{\text{فم}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}}$$

$$= \frac{\text{فم}^{\text{لا}}}{\text{جف}^{\text{و}}} \left( \frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{ما}}} \right) + \frac{\text{فم}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} \left( \frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{ما}}} \right) \dots (۵)$$

اور علیٰ ہذا۔

$$(۶) \dots \dots \dots \text{ع} = \text{فم}^{\text{لا}} \text{ما} \quad (۲) \text{ فرض کرو کہ}$$



جہاں لا اور ما متبوع متغیرات کے دئے ہوئے تفاعل ہیں۔  
اور ع کے مشتقات بلحاظ ت کے دریافت طلب ہیں۔  
اب دفعہ ۵۹ (آ) سے

$$\text{فرع} = \frac{\text{جف فم}^1 \text{ فرلا}}{\text{جف لا}^1 \text{ فرت}} + \frac{\text{جف فم}^2 \text{ فرما}}{\text{جف ما}^2 \text{ فرت}} \dots (۷)$$

دوبارہ تفریق کرنے سے

$$\text{فرع}^2 = \frac{\text{جف فم}^1 \text{ فرلا}^2}{\text{جف لا}^2 \text{ فرت}^2} + \frac{\text{جف فم}^2 \text{ فرما}^2}{\text{جف ما}^2 \text{ فرت}^2} + \frac{\text{فر}^1 (\text{جف فم}^1)}{\text{فرت}^1 (\text{جف لا}^1)} + \frac{\text{فر}^2 (\text{جف فم}^2)}{\text{فرت}^2 (\text{جف ما}^2)} \dots (۸)$$

اب مذکورہ مسئلہ سے

$$\text{فر}^1 (\text{جف فم}^1) = \frac{\text{جف}^1 (\text{جف فم}^1)}{\text{جف لا}^1 (\text{جف فم}^1)} + \frac{\text{جف}^2 (\text{جف فم}^2)}{\text{جف ما}^2 (\text{جف فم}^2)} + \frac{\text{جف}^3 (\text{جف فم}^3)}{\text{جف فم}^3 (\text{جف فم}^3)}$$

$$\text{فر}^2 (\text{جف فم}^2) = \frac{\text{جف}^2 (\text{جف فم}^2)}{\text{جف لا}^2 (\text{جف فم}^2)} + \frac{\text{جف}^3 (\text{جف فم}^3)}{\text{جف ما}^3 (\text{جف فم}^3)}$$

$$+ \frac{\text{جف}^4 (\text{جف فم}^4)}{\text{جف فم}^4 (\text{جف فم}^4)}$$

اب (۸) میں درج کر کے دفعہ ۱۹۳ کے مطابق قانون متبادل کے استعمال سے

$$\text{فرع}^2 = \frac{\text{جف فم}^1 \text{ فرلا}^2}{\text{جف لا}^2 \text{ فرت}^2} + \frac{\text{جف فم}^2 \text{ فرما}^2}{\text{جف ما}^2 \text{ فرت}^2} + \frac{\text{جف فم}^3 \text{ فرلا}^3}{\text{جف لا}^3 \text{ فرت}^3} + \dots (۹)$$

$$+ \frac{\text{جف فم}^4 \text{ فرما}^4}{\text{جف ما}^4 \text{ فرت}^4} + \frac{\text{جف فم}^5 \text{ فرلا}^5}{\text{جف لا}^5 \text{ فرت}^5} + \dots (۱۰)$$

اس طریقہ کو جاری رکھا جاسکتا ہے لیکن اس سے زیادہ بڑھنے کی  
شاذ ہی ضرورت پڑتی ہے۔

بعض اوقات حرکیاتی سوال میں محدودوں کے تبدیل کرنے میں اس کی ضرورت پڑتی ہے۔ بطور مثال فرض کرو کہ دو ابعاد میں کارٹیزی محدودوں سے قطبی محدودوں میں تبدیل کرنا ہے یعنی

$$\text{لا} = \text{رجم طما} \quad \text{ما} = \text{رجب طما}$$

مذکورہ بالا طریقہ سے  $\frac{\text{فما}}{\text{جفت}} \text{ اور } \frac{\text{فما}}{\text{جفت}} \text{ کو } \text{لا} \text{ اور } \text{طما} \text{ کے مشتقات (بیانات کے) کی رقموں میں بیان کیا جاسکتا ہے۔}$

مثال :- فرض کرو کہ ی = فما (لا ج ت) + خما (لا ج ت) ... (۱۰)  
جہاں متغیرات لا اور ت غیر تابع ہیں۔  
اختصار کیلئے لا (ج ت) = ۶ اور لا + ج ت = ۷ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = \text{فما (۶)} + \text{خما (و)} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جفت}} = \text{ج فما (۶)} + \text{ج خما (و)}$$

(۱۱) .....

$$\text{اور } \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = \text{فما (۶)} + \text{خما (و)} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جفت}} = \text{ج فما (۶)} + \text{ج خما (و)}$$

(۱۲) .....

$$\text{اس لئے } \frac{\text{جف ی}}{\text{جفت}} = \text{ج } \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} \quad (۱۳) \dots\dots\dots$$

۲۰۰۔ تضمینی تفاعل کا تفرق :- فرض کرو کہ ما متغیر لا

کا تفاعل ہے جو تضمینی طور پر مساوات

سے بیان کیا گیا ہے ما کے متواتر مشتقات لمحاظ لا کے دریافت طلب ہیں  
دفعہ ۵۹ کے مطابق

$$(۲) \dots\dots\dots = \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

اگر اسے بلحاظ لا کے تفرق کریں تو

$$= \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} \left( \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} \right) + \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} \left( \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} \right) \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

(۳) .....

اب دفعہ ۵۹ سے

۵۱۷

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} \left( \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} \right) = \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} \left( \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} \right) + \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} \left( \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} \right) \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} \left( \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} \right) = \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} \left( \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} \right) + \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} \left( \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} \right) \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

اس لئے (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

(۴) .....

اگر (۲) سے حاصل شدہ  $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$  کی قیمت اس میں درج کر دیں تو

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} - \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

(۴) کو پھر تفرق کر کے  $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$  اور  $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$  کی قیمت درج کرنے سے  $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$  کی قیمت دریافت ہو سکتی ہے اور اسی طرح اعلیٰ رتبہ کے مشتقوں کیلئے ضابطہ (۵) سے ایسے تخمینات کے انحصار کے لئے جملہ حاصل ہو جاتا ہے

جنکی مساوات قائم محدود میں (۱) سے بیان کی گئی ہو۔





مثال ۱:- ایک ذرہ رفتار کے مکعب کے متناسب فراجمت کے زیر عمل حرکت کر رہا ہے اس کی مساوات حرکت ہے

$$\frac{فرتا}{فرتا} = - گ \left( \frac{فرتا}{فرتا} \right) \quad (۸)$$

اگر ترقیم کے فرق کو مد نظر رکھا جائے تو (۲) سے فوراً حاصل ہوتا ہے

$$\frac{فرتا}{فرتا} = + گ \quad (۹)$$

$$\text{اسلئے } ت = + گ لا + لا + ب \quad (۱۰)$$

$$\text{مثال ۲:- جملہ } \frac{جفا۶}{جفا لا} + \frac{جفا۶}{جفا ما} \quad (۱۱)$$

کو قائم محدودوں سے قطبی محدودوں میں تبدیل کرو۔

لا = رجم طما اور ما = رجب طما رکھنے سے ماہل ہوتا ہے کہ

$$\left[ \frac{جفا۶}{جفا لا} = \frac{جفا۶}{جفا لا} + \frac{جفا۶}{جفا ما} = \frac{جفا۶}{جفا لا} + \frac{جفا۶}{جفا ما} \right] \quad (۱۲)$$

$$\text{اسلئے } \frac{جفا۶}{جفا لا} = \frac{جفا۶}{جفا ما} - \frac{جفا۶}{جفا لا} \quad (۱۳)$$

$$\frac{جفا۶}{جفا ما} = \frac{جفا۶}{جفا لا} + \frac{جفا۶}{جفا ما} \quad (۱۴)$$

$$\text{اسلئے } \frac{جفا۶}{جفا لا} = \frac{جفا۶}{جفا لا} - \frac{جفا۶}{جفا ما} \quad (۱۵)$$

$$\frac{جفا۶}{جفا ما} = \frac{جفا۶}{جفا لا} + \frac{جفا۶}{جفا ما} \quad (۱۵)$$

اس میں مندرجہ تمام عاملوں کا عمل کرنا ضروری نہیں ہے کیونکہ جملہ (۱۱) کے

حاصل جمع میں بہت سی رقمیں کٹ جائیں گی۔ باقی رقموں سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{جفء جفء}}{\text{جفء مآ}} = \frac{\text{جفء}}{\text{جفء ر}} + \frac{\text{جفء}}{\text{جفء ر}} + \frac{\text{جفء}}{\text{جفء ر}} + \dots (۱۲)$$

### امثلہ نمبر ۶۲ (جزوی تفرق اور ٹھیک تفرق)

(۱) اگر  $\frac{\text{لا مآ}}{\text{لا مآ}} = ۶$  تو تصدیق کرو کہ  $\frac{\text{جفء}}{\text{جفء لا}} + \frac{\text{جفء}}{\text{جفء مآ}} = ۶$

اور  $\frac{\text{جفء لا}}{\text{جفء لا}} + \frac{\text{لا مآ}}{\text{جفء لا جفء مآ}} + \frac{\text{مآ جفء}}{\text{جفء مآ}} = ۶$

(۲) اگر  $\frac{\text{لا مآ}}{\text{لا مآ}} = ۱$  تو ثابت کرو کہ  $\frac{\text{جفء}}{\text{جفء لا}} + \frac{\text{جفء}}{\text{جفء مآ}} = ۱$

(۳) اگر  $\frac{\text{لا مآ}}{\text{لا مآ}} = ۱$  تو ثابت کرو کہ  $\frac{\text{جفء}}{\text{جفء لا}} + \frac{\text{جفء}}{\text{جفء مآ}} = ۱$

نیز اسکا عکس ثابت کرو یعنی اگر  $\frac{\text{جفء}}{\text{جفء لا}} = ۱$  تو ہی مذکور بالا شکل کا ہوگا

(۴) ثابت کرو کہ مساوات  $\frac{\text{جفء فہ}}{\text{جفء ر}} + \frac{\text{جفء فہ}}{\text{جفء ر}} + \frac{\text{جفء فہ}}{\text{جفء ر}} = \text{پوری ہوتی ہے}$

اگر  $\text{فہ} = (\text{ا ر} + \frac{\text{ب}}{\text{ر}}) \text{ جم ن (طہ۔ صہ)}$

(۵) ثابت کرو کہ  $\text{فہ} (\text{لا مآ}) (\text{لا فر لا مآ فر مآ}) + \text{فہ} (\frac{\text{ب}}{\text{ر}}) (\text{لا فر مآ۔ مآ فر لا}) = ۰$

کے نمونے کی مساوات  $(\text{لا مآ})$  سے تقسیم کرنے سے ٹھیک مساوات بن جاتی ہے

(۶) ثابت کرو کہ جبر ما فر لا۔ جب لا فر ما ٹھیک تفرقی ہے تفاعل  
جبر ما۔ جم لا  
ع کا انیز ع دریافت کرو۔

(۷) اگر  $\frac{\text{جف فدا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فدا}}{\text{جف ما}} =$  تو ثابت کرو کہ ایک تفاعل خدا  
وجود رکھتا ہے جس کے لئے

$$\frac{\text{جف فدا}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف خدا}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف خدا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف خدا}}{\text{جف ما}}$$

اور

(۸) اگر  $\frac{\text{جف فدا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فدا}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف فدا}}{\text{جف طا}} =$   
تو ثابت کرو کہ ایک تفاعل خدا وجود رکھتا ہے جس کے لئے

$$\frac{\text{جف فدا}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف خدا}}{\text{جف طا}} = \frac{\text{جف خدا}}{\text{جف ما}}$$

اور تفاعل خدا بھی اسی جزوی تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے جس کو فدا  
پورا کرتا ہے۔

(۹) اگر  $\frac{\text{جف فدا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فدا}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف فدا}}{\text{جف طا}} =$

تو ثابت کرو کہ ایک تفاعل خدا ایسا وجود رکھتا ہے جس کے لئے

$$\frac{\text{جف فدا}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف خدا}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف خدا}}{\text{جف طا}} + \frac{\text{جف خدا}}{\text{جف لا}}$$



## امثلہ ۶۵ (اعظم اور اقل قیمتیں)

(۱) - ثابت کرو کہ سطح  $را$  =  $لا$  -  $ما$  کا معین (ی) نقطہ  $لا = .$ ،  $ما = .$  پر قائم ہے لیکن اعظم یا اقل نہیں ہے۔

اس سطح کے اہم ارتفاعی خطوط کھینچو۔  
(۲) دفعہ ۱۹۶ کے ضابطہ سے ثابت کرو کہ کم از کم سطح والا متوازی السطوح جبکہ حجم دیا ہوا ہو ایک کعب ہوتا ہے۔

(۳) اگر  $ا$ ،  $ب$ ،  $ج$  ایک مثلث کے راس ہوں اور  $ن$  کوئی متغیر ۵۲ نقطہ ہو تو  $ا + ب + ج$  کا حاصل جمع اقل ہوگا جب  $ن$  نقاط  $ا$ ،  $ب$ ،  $ج$  کے اوسط مرکز پر منطبق ہوگا۔

(۴) سوال (۳) کی ترقیم سے  $ا + ب + ج$  کی قیمت اقل ہوگی جبکہ  $ن$  نقاط  $ا$ ،  $ب$ ،  $ج$  پر واقع تین ذروں

$ا$ ،  $ب$ ،  $ج$  کے مرکز محبت پر منطبق ہوگا۔  
(۵) بتاؤ کہ  $لا$ ،  $ما$  کی کن قیمت کے لئے سطح  $ی = لا + ما - ۳$  کا معین قائم ہوگا۔

[ قیمتیں  $ا$ ،  $ب$  اور  $ج$  ہیں۔ لیکن دوسری قیمت کے لئے  $ی$  اعظم یا اقل نہیں ہے ]

(۶) ثابت کرو کہ سطح  $ج$  =  $ما$  -  $لا$  کا معین نقطہ  $لا = .$ ،  $ما = .$  پر قائم ہے لیکن اعظم یا اقل نہیں ہے۔ ہم ارتفاعی خطوط کھینچو۔

(۷) بتاؤ کہ  $لا$ ،  $ما$  کی کن قیمتوں کے لئے تعادل  $لا + ما - ۲$  قائم ہے۔



ستھیل ہو جاتی ہے اس مساوات میں

$$\frac{فر۱}{فرط۱} + ۱ = ۱$$

$$(۲) \quad ۱ = ۱ \text{ ت رکھنے سے مساوات } \frac{فر۱}{فر۲} + \frac{۱}{فر۱} + \frac{فر۱}{فر۲} = ۱$$

تبدیل ہو جاتی ہے اس مساوات میں

$$\text{ت } \frac{فر۱}{فر۲} + \frac{فر۱}{فر۲} + ۱ = ۱$$

$$(۳) \quad \text{اگر } ۱ + ۲ = ۲ \text{ ہا } ۱ + ۲ = ۲ \text{ گ } ۱ + ۲ = ۲ \text{ ج } =$$

$$\text{تو ثابت کرو کہ } ۱ - ۲ = \frac{۱}{۲} = \frac{(۱ - ۲)}{(۱ + ۲)} = \frac{(۱ - ۲)}{(۱ + ۲)} = \frac{(۱ - ۲)}{(۱ + ۲)}$$

$$\text{جہاں } ۱ = \frac{فر۱}{فر۲}, ۲ = \frac{فر۱}{فر۲} \text{ اور } ۲ = \frac{فر۱}{فر۲}$$

$$(۴) \quad \text{اگر } ۱ = \frac{فر۱}{فر۲} \text{ تو ثابت کرو کہ } ۱ = \frac{فر۱}{فر۲} + \frac{فر۱}{فر۲} =$$

$$\text{اور } \frac{فر۱}{فر۲} + \frac{فر۱}{فر۲} = \frac{۱}{۱} = \frac{(۱ + ۲)}{(۱ + ۲)} = \frac{(۱ + ۲)}{(۱ + ۲)}$$

$$\{ (۱ + ۲) \} = \frac{۱}{۱}$$

$$(۵) \quad \text{اگر } ۱ = \frac{فر۱}{فر۲} \text{ تو ثابت کرو کہ } ۱ = \frac{فر۱}{فر۲} + \frac{فر۱}{فر۲} =$$

$$۱ = \frac{(۱ + ۲)}{(۱ + ۲)} + \frac{(۱ + ۲)}{(۱ + ۲)} = \frac{(۱ + ۲)}{(۱ + ۲)}$$

$$(۶) \quad \text{اگر } ۱ = \frac{فر۱}{فر۲} \text{ جہاں } ۱ = \frac{(۱ + ۲)}{(۱ + ۲)} \text{ تو ثابت کرو کہ } ۱ =$$

$$\frac{فر۱}{فر۲} + \frac{فر۱}{فر۲} = \frac{۱}{۱} = \frac{(۱ + ۲)}{(۱ + ۲)} = \frac{(۱ + ۲)}{(۱ + ۲)}$$

(۷) اگر مال  $\frac{\text{جف}^2}{\text{جف}^2 \text{ لا}^2} + \frac{\text{جف}^2}{\text{جف}^2 \text{ ما}^2}$  کے لئے علامت لف استعمال کی جائے تو ثابت کرو کہ

لف لوگ ر =۔۔ جہاں ر =  $\sqrt{(\text{لا} - \text{عما}) + (\text{ما} - \text{بہا})}$

(۸) اگر  $\text{ف} = \text{ع} = (\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{عی}^2)$

تو ثابت کرو کہ  $\frac{\text{جف}^2 \text{ ع}^2}{\text{جف}^2 \text{ لا}^2} + \frac{\text{جف}^2 \text{ ع}^2}{\text{جف}^2 \text{ ما}^2} + \frac{\text{جف}^2 \text{ ع}^2}{\text{جف}^2 \text{ عی}^2}$   
 $= \text{م} = (\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{عی}^2) \text{ ف}^2 (\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{عی}^2) + \text{ف}^2 (\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{عی}^2)$

(۹) اگر  $\text{ف} = \text{ع} = \text{ف}(\text{ر})$  جہاں ر =  $\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{عی}^2}$

تو ثابت کرو کہ  $\frac{\text{جف}^2 \text{ ع}^2}{\text{جف}^2 \text{ لا}^2} + \frac{\text{جف}^2 \text{ ع}^2}{\text{جف}^2 \text{ ما}^2} + \frac{\text{جف}^2 \text{ ع}^2}{\text{جف}^2 \text{ عی}^2} = \text{ف}^2(\text{ر}) + \frac{\text{ر}^2}{\text{ف}^2(\text{ر})}$

(۱۰) اگر لف مال  $\frac{\text{جف}^2}{\text{جف}^2 \text{ لا}^2} + \frac{\text{جف}^2}{\text{جف}^2 \text{ ما}^2} + \frac{\text{جف}^2}{\text{جف}^2 \text{ عی}^2}$  کو ظاہر کرے تو ثابت کرو کہ

لف ر =  $\frac{\text{ر}^2}{\text{ف}^2}$  اور لف  $\frac{\text{ر}^2}{\text{ف}^2} =$ ۔۔

جہاں ر =  $\sqrt{(\text{لا} - \text{عما}) + (\text{ما} - \text{بہا}) + (\text{عی} - \text{جما})}$

(۱۱) اگر لف کے وہی معنی ہوں جو سوال (۱۰) میں ہیں اور اگر

لف ع =۔۔ لف ا و =۔۔ لف ہ =۔۔ اور  $\frac{\text{جف}^2 \text{ ع}^2}{\text{جف}^2 \text{ لا}^2} + \frac{\text{جف}^2 \text{ ع}^2}{\text{جف}^2 \text{ ما}^2}$

+  $\frac{\text{جف}^2 \text{ ع}^2}{\text{جف}^2 \text{ عی}^2}$  =۔۔

تو لف (لا ع + ما و + عی ہ) =۔۔

(۱۲) اگر  $\epsilon$ ، و متغیر  $\lambda$ ،  $\mu$  ہی کے دو ایسے تفاعل ہوں جو مساوات  
لف  $\epsilon = ۰$  اور لفا  $\epsilon = ۰$  کو پورا کریں اور تفاعل ہو  $\epsilon$  کا توانیت کر دو کہ  
و کی شکل  $(\epsilon + \epsilon) = ۰$  ہوگی۔

(۱۳) اگر  $\lambda = ۰$ ،  $\mu = ۰$  جب  $\mu$  جہاں  $\lambda$  اور  $\mu$  متغیر  
ت کے تفاعل میں توانیت کر دو کہ

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu} \text{ جب } \mu = \frac{\lambda}{\mu} - \frac{\lambda}{\mu} \text{ (فرط)} \\ - \frac{\lambda}{\mu} \text{ جب } \mu = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu} \text{ (فرط)}$$

(۱۴) اگر  $\epsilon = ۰$ ،  $\epsilon = ۰$  (ج ت -) +  $\frac{۱}{۲}$  (ج ت +) = ۵۲۴

$$\text{توانیت کر دو کہ } \frac{\epsilon}{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\epsilon} + \frac{\epsilon}{\epsilon} \text{ (ج ت -) + } \frac{\epsilon}{\epsilon} \text{ (ج ت +)}$$

(۱۵) اگر  $\epsilon = ۰$ ،  $\epsilon = ۰$  توانیت کر دو کہ  $\frac{\epsilon}{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\epsilon} + \frac{\epsilon}{\epsilon}$

(۱۶) اگر  $\epsilon = ۰$ ،  $\epsilon = ۰$  توانیت کر دو کہ  $\frac{\epsilon}{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\epsilon} + \frac{\epsilon}{\epsilon}$

$$\frac{\epsilon}{\epsilon} + \frac{\epsilon}{\epsilon}$$

(۱۷)  $\epsilon = ۰$ ،  $\epsilon = ۰$  (ج ت -) +  $\frac{۱}{۲}$  (ج ت +) = ۵۲۴

$$\text{اور } \frac{\epsilon}{\epsilon} + \frac{\epsilon}{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\epsilon} + \frac{\epsilon}{\epsilon} \text{ (ج ت -) + } \frac{\epsilon}{\epsilon} \text{ (ج ت +)}$$

(۱۸) اگر  $\epsilon = ۰$ ،  $\epsilon = ۰$  (ج ت -) +  $\frac{۱}{۲}$  (ج ت +) = ۵۲۴

(۱۹) اگر می۔جہ = (لا۔جہ) فن (ما۔بہ) (تو ثابت کرو کہ)

$$(لا۔جہ) \frac{جف ی}{جف لا} + (ما۔بہ) \frac{جف ی}{جف ما} = می۔جہ$$

(۲۰) اگر لا = ج جنر طا جم عا، ما = ج جنر طا جب عا

$$\text{تو ثابت کرو کہ } \frac{جف عا}{جف طا} + \frac{جف عا}{جف عا}$$

$$= \frac{ج}{ج} \text{ (جنر طا۔جم عا) } \left( \frac{جف عا}{جف لا} + \frac{جف عا}{جف ما} \right)$$

(۲۱) ثابت کرو کہ اگر منہی فہ (لا، ما) =۔ کے کسی نقطہ پر ایک ساتھ

فہ =۔، فہ =۔ تو منہی کی دو شاخیں (حقیقی یا خیالی) اس نقطہ میں سے

گزرتی ہیں اور ان شاخوں کی سمتیں ذیل کی دو درجی مساوات مال ہوتی ہیں۔

$$فہ لا + فہ ما + فہ فر ما = فہ لا (فر لا) =۔$$

پس ثابت کرو کہ نقطہ عقدہ یا قرن یا اکیلا نقطہ ہے بموجب اس کے کہ

$$(فہ لا) < یا = یا > فہ لا$$

سے

ضمیمہ  
عددی جدول  
۱۔۔۔ طبعی اعداد آتا۔۔۔ کے مربع

[illegible]

جواب :- او کے تقوین صفر سے آگ تک تمام اعداد کے جذر المربع

S9	S8	S7	S6	S5	S4	S3	S2	S1	S0		
S9P9	S8P9	S7P9	S6P9	S5P9	S4P9	S3P9	S2P9	S1P9	S0P9	.	.
1S9P9	1S8P9	1S7P9	1S6P9	1S5P9	1S4P9	1S3P9	1S2P9	1S1P9	1S0P9	1S...	1
1S9P8	1S8P8	1S7P8	1S6P8	1S5P8	1S4P8	1S3P8	1S2P8	1S1P8	1S0P8	1S...	2
1S9P7	1S8P7	1S7P7	1S6P7	1S5P7	1S4P7	1S3P7	1S2P7	1S1P7	1S0P7	1S...	3
P9P9	P8P9	P7P9	P6P9	P5P9	P4P9	P3P9	P2P9	P1P9	P0P9	P...	P
P9P8	P8P8	P7P8	P6P8	P5P8	P4P8	P3P8	P2P8	P1P8	P0P8	P...	Q
P9P7	P8P7	P7P7	P6P7	P5P7	P4P7	P3P7	P2P7	P1P7	P0P7	P...	R
P9P6	P8P6	P7P6	P6P6	P5P6	P4P6	P3P6	P2P6	P1P6	P0P6	P...	S
P9P5	P8P5	P7P5	P6P5	P5P5	P4P5	P3P5	P2P5	P1P5	P0P5	P...	T
P9P4	P8P4	P7P4	P6P4	P5P4	P4P4	P3P4	P2P4	P1P4	P0P4	P...	U
P9P3	P8P3	P7P3	P6P3	P5P3	P4P3	P3P3	P2P3	P1P3	P0P3	P...	V
P9P2	P8P2	P7P2	P6P2	P5P2	P4P2	P3P2	P2P2	P1P2	P0P2	P...	W
P9P1	P8P1	P7P1	P6P1	P5P1	P4P1	P3P1	P2P1	P1P1	P0P1	P...	X
P9P0	P8P0	P7P0	P6P0	P5P0	P4P0	P3P0	P2P0	P1P0	P0P0	P...	Y
P9P9	P8P9	P7P9	P6P9	P5P9	P4P9	P3P9	P2P9	P1P9	P0P9	P...	Z

ج ۲:- ایک وقفوں پر اسے.. تاک کے طبعی اعداد کے جذرا مربے

۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰	
۳۶۳۵۹	۳۶۲۴۳	۳۶۱۲۳	۳۶۰۰۰	۳۵۸۷۳	۳۵۷۴۲	۳۵۶۰۶	۳۵۴۷۴	۳۵۳۴۰	۳۵۲۰۲	۱
۵۶۳۸۵	۵۶۲۹۲	۵۶۱۹۶	۵۶۰۹۹	۵۶۰۰۰	۵۵۸۹۹	۵۵۷۹۶	۵۵۶۹۰	۵۵۵۸۳	۵۵۴۷۲	۲
۷۶۲۴۵	۷۶۱۶۳	۷۶۰۸۳	۷۶۰۰۰	۷۵۹۱۶	۷۵۸۳۱	۷۵۷۴۵	۷۵۶۵۷	۷۵۵۶۸	۷۵۴۷۷	۳
۹۶۰۰۰	۹۵۹۲۸	۹۵۸۵۶	۹۵۷۸۲	۹۵۷۰۸	۹۵۶۳۲	۹۵۵۵۷	۹۵۴۸۱	۹۵۴۰۳	۹۵۳۲۵	۴
۱۱۵۶۸۱	۱۱۵۶۱۶	۱۱۵۵۵۰	۱۱۵۴۸۳	۱۱۵۴۱۶	۱۱۵۳۴۸	۱۱۵۲۸۰	۱۱۵۲۱۱	۱۱۵۱۴۱	۱۱۵۰۷۱	۵
۱۳۵۳۰۷	۱۳۵۲۴۲	۱۳۵۱۸۵	۱۳۵۱۲۴	۱۳۵۰۶۲	۱۳۵۰۰۰	۱۳۴۹۳۷	۱۳۴۸۷۴	۱۳۴۸۱۱	۱۳۴۷۴۶	۶
۱۵۵۸۸۸	۱۵۵۸۳۳	۱۵۵۷۷۵	۱۵۵۷۱۸	۱۵۵۶۶۰	۱۵۵۶۰۲	۱۵۵۵۴۳	۱۵۵۴۸۵	۱۵۵۴۲۶	۱۵۵۳۶۷	۷
۱۷۵۴۳۳	۱۷۵۳۸۱	۱۷۵۳۲۷	۱۷۵۲۷۲	۱۷۵۲۱۶	۱۷۵۱۶۵	۱۷۵۱۱۰	۱۷۵۰۵۵	۱۷۵۰۰۰	۱۷۴۹۴۴	۸
۱۹۵۹۵۰	۱۹۵۸۹۹	۱۹۵۸۴۹	۱۹۵۷۹۸	۱۹۵۷۴۷	۱۹۵۶۹۵	۱۹۵۶۴۳	۱۹۵۵۹۲	۱۹۵۵۳۹	۱۹۵۴۸۷	۹

ج ۳:- او کے وقفوں پر اسے.. تاک کے اعداد کے تکافیات

۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰	
۱۵۲۶	۱۵۵۶	۱۵۸۸	۱۶۲۵	۱۶۶۷	۱۷۱۴	۱۷۶۹	۱۸۳۳	۱۹۰۹	۱۹۰۰	۱
۳۳۳۵	۳۳۵۷	۳۳۷۰	۳۳۸۵	۳۴۰۰	۳۴۱۷	۳۴۳۵	۳۴۵۵	۳۴۷۶	۳۵۰۰	۲
۵۲۵۶	۵۲۶۳	۵۲۷۰	۵۲۷۸	۵۲۸۶	۵۲۹۴	۵۳۰۳	۵۳۱۳	۵۳۲۳	۵۳۳۳	۳
۷۲۰۴	۷۲۰۸	۷۲۱۳	۷۲۱۷	۷۲۲۲	۷۲۲۷	۷۲۳۳	۷۲۳۸	۷۲۴۴	۷۲۵۰	۴
۹۱۶۹	۹۱۷۲	۹۱۷۵	۹۱۷۹	۹۱۸۲	۹۱۸۵	۹۱۸۹	۹۱۹۲	۹۱۹۶	۹۲۰۰	۵
۱۱۱۵	۱۱۱۷	۱۱۱۹	۱۱۲۱	۱۱۲۳	۱۱۲۵	۱۱۲۷	۱۱۲۹	۱۱۳۱	۱۱۳۳	۶
۱۳۱۷	۱۳۱۸	۱۳۱۹	۱۳۲۰	۱۳۲۱	۱۳۲۲	۱۳۲۳	۱۳۲۴	۱۳۲۵	۱۳۲۶	۷
۱۵۱۹	۱۵۲۰	۱۵۲۱	۱۵۲۲	۱۵۲۳	۱۵۲۴	۱۵۲۵	۱۵۲۶	۱۵۲۷	۱۵۲۸	۸
۱۷۲۱	۱۷۲۲	۱۷۲۳	۱۷۲۴	۱۷۲۵	۱۷۲۶	۱۷۲۷	۱۷۲۸	۱۷۲۹	۱۷۳۰	۹





ع۔ ا کے قفون صفر و تا تک تمام اعد کے قفون نراندی تفاعلون کی قیمتیں

لا	قولا	قولا	جمن لا	جبن لا	جمن لا
۰	۱۵۰۰۰	۱۵۰۰۰	۱۵۰۰۰	۰	۰
۱	۱۵۱۰۵	۱۵۰۰۵	۱۵۰۰۵	۱۰۰	۱۰۰
۲	۱۵۲۲۱	۱۵۰۱۹	۱۵۰۲۰	۲۰۱	۱۹۷
۳	۱۵۳۵۰	۱۵۰۴۱	۱۵۰۴۵	۳۰۵	۲۹۱
۴	۱۵۴۹۲	۱۵۰۶۷	۱۵۰۸۱	۴۱۱	۳۸۰
۵	۱۵۶۴۹	۱۵۰۹۷	۱۵۱۲۸	۵۲۱	۴۷۲
۶	۱۵۸۲۲	۱۵۱۲۹	۱۵۱۸۵	۶۳۷	۵۳۷
۷	۲۵۰۱۴	۱۵۱۹۷	۱۵۲۵۵	۷۵۹	۶۰۴
۸	۲۵۲۲۶	۱۵۲۲۹	۱۵۳۳۷	۸۸۸	۷۹۴
۹	۲۵۴۶۰	۱۵۲۰۷	۱۵۴۳۳	۱۰۲۷	۸۱۹
۱۰	۲۵۷۱۸	۱۵۳۶۸	۱۵۵۴۳	۱۱۷۵	۹۲۲
۱۱	۳۵۰۰۴	۱۵۳۳۳	۱۵۶۶۹	۱۳۳۶	۱۰۰۱
۱۲	۳۵۳۲۰	۱۵۳۰۱	۱۵۸۱۱	۱۵۰۹	۱۱۳۴
۱۳	۳۵۶۶۹	۱۵۲۷۳	۱۵۹۷۱	۱۶۹۸	۱۲۶۲
۱۴	۴۵۰۵۵	۱۵۲۴۷	۲۵۱۵۱	۱۹۰۴	۱۸۸۵
۱۵	۴۵۴۸۲	۱۵۲۲۳	۲۵۳۵۲	۲۱۲۹	۲۹۰۵
۱۶	۴۵۹۵۳	۱۵۲۰۲	۲۵۵۷۷	۲۳۷۶	۳۹۲۲
۱۷	۵۵۴۷۴	۱۵۱۸۳	۲۵۸۲۸	۲۶۴۶	۴۹۳۵
۱۸	۶۵۰۵۰	۱۵۱۶۵	۲۶۱۰۷	۲۹۴۲	۵۹۴۷
۱۹	۶۵۶۸۶	۱۵۱۵۰	۲۶۴۱۸	۳۲۶۸	۶۹۵۶
۲۰	۷۵۳۸۹	۱۵۱۳۵	۳۶۷۲	۳۵۴۲	۷۹۶۴
۲۱	۸۵۱۶۶	۱۵۱۲۲	۴۶۱۴۴	۴۰۲۲	۸۹۷۰
۲۲	۹۵۰۲۵	۱۵۱۱۱	۴۶۵۶۸	۴۴۵۷	۹۹۷۶
۲۳	۹۵۹۷۳	۱۵۱۰۰	۵۶۰۳۷	۴۹۳۷	۱۰۸۰
۲۴	۱۱۵۰۲۳	۱۵۰۹۱	۵۶۵۵۷	۵۴۶۶	۱۱۸۴
۲۵	۱۲۵۱۸۲	۱۵۰۸۲	۶۶۱۳۲	۶۰۵۰	۱۲۸۷

## ف۔ لوکار نم بلحاظ اساس قو

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۱	۰	۶۰۹۵	۶۱۸۲	۶۲۶۲	۶۳۴۶	۶۴۰۵	۶۴۶۰	۶۵۱۸	۶۵۸۸	۶۶۴۲
۲	۶۶۹۳	۶۷۴۲	۶۷۸۸	۶۸۳۳	۶۸۷۵	۶۹۱۶	۶۹۵۶	۶۹۹۳	۷۰۳۰	۷۰۶۵
۳	۷۰۹۹	۷۱۳۱	۷۱۶۳	۷۱۹۵	۷۲۲۴	۷۲۵۳	۷۲۸۱	۷۳۰۸	۷۳۳۵	۷۳۶۲
۴	۷۳۸۹	۷۴۱۱	۷۴۳۵	۷۴۵۹	۷۴۸۲	۷۵۰۴	۷۵۲۶	۷۵۴۸	۷۵۶۹	۷۵۸۹
۵	۷۶۰۹	۷۶۲۹	۷۶۴۹	۷۶۶۸	۷۶۸۶	۷۷۰۵	۷۷۲۳	۷۷۴۳	۷۷۵۸	۷۷۷۵
۶	۷۷۹۲	۷۸۰۸	۷۸۲۵	۷۸۴۱	۷۸۵۶	۷۸۷۲	۷۸۸۷	۷۹۰۲	۷۹۱۷	۷۹۳۲
۷	۷۹۴۶	۷۹۶۰	۷۹۷۴	۷۹۸۸	۷۹۹۹	۸۰۰۹	۸۰۱۵	۸۰۲۸	۸۰۴۱	۸۰۵۴
۸	۸۰۷۹	۸۰۹۲	۸۱۰۴	۸۱۱۶	۸۱۲۸	۸۱۳۰	۸۱۵۲	۸۱۶۳	۸۱۷۵	۸۱۸۶
۹	۸۱۹۷	۸۲۰۸	۸۲۱۹	۸۲۳۰	۸۲۴۱	۸۲۵۱	۸۲۶۲	۸۲۷۲	۸۲۸۲	۸۲۹۳

لوک ۱۰ = ۲۵۳۰۳، لوک ۱ = ۲۵۶۰۵، لوک ۲ = ۲۵۹۰۸



# فہرست مضامین

صغاری احصا  
(حصہ سوم)

A

Amplitude

حیطہ، سعت

Approximation

تقرب

Asymptotes

متقارب

Binomial Theorem

B

مسئلہ ثنائی

Charge

C

بار

Circuit

دور

Commutative property

خاصیت مبادلہ

Complementary function

متکمّل تفاعل

Complete solution

مکمل یا پورا حل

Deflection

D

انحراف

Degree

درجہ

Differential equation

تفیری مساوات

Differentiation

تفریق

Double limit

Dynamics

Electromotive force

Envelope

Epoch

Equilibrium

Equipotential

Essentially convergent

Evolute

Exact equation

Expansion

Forced Oscillation

Harmonic

Homogeneous equation

Induction

Integrating factor

Integration

Involute

Maximum

Minimum

Multiple

Normal mode

Operator (D)

Order

Orthogonal trajectories

دوہری انتہا  
حرکیات، علم حرکت  
قوت محرکہ برقی

لغات

آن

توازن

ایم قوتہ

لازمًا مستقر

برعکس

طبیعت مساوات

بیملاؤ

قسری ارتعاش

موسیقی

متجانس مساوات

امالہ

متکمل جزو ضربی

متکمل

دیرتیب

اعظم

اقل

ضعفی

طبیعی کیفیت

عامل (عف)

رتبہ

قائم خطوط رمی

Partial	P	جزوی
Particular Integral		خاص تحمیل
Particular solution		خاص حل
Pendulum		رقاص
Period		دور
Phase		ہیئت
Point of inflexion		نقطہ عطف
Pontential		توہ
Potential energy		توانائی بالقویہ
Power series		قوتی سلسلہ
Primitive		ابتدائی
Projection		ظیل
Rectilinear motion	R	ستقیم حرکت
Repulsion		اندفاع
Resistance		مزاہمت
Self-induction	S	خود امالہ
Simultaneous		ہمزاد
Singular solution		نادرجل
Solid of revolution		گردشی مجسم
Stable		تاقم
Subnormal		زیر عماد
Subtangent		زیر مماس
Suspension bridge		جھول لیل
Unstable	U	غیر تاقم
Variables Separable	V	تغییر جدائی پذیر

Vibration

اهتزاز

Viscosity

لزوجة

————— (۵) —————



# اشاریہ

## اعداد صفحوں کے لحاظ سے

۵۲۲	ابتدائی، تفرقی مساوات کا
۶۳۷	استدقاق، لامتناہی سلسلوں کا
۵۲۲	اسقاط، اختیاری مستقلوں کا
۷۳۱، ۷۹۲	انحداد
۷۳۲	انعطاف، نقاط
۶۸۵، ۶۷۷	باقی، شیلیہ اور میکلوون کے مسئلوں میں
۶۵۸	پھیلاؤ، تفرقی مساواتوں کے ذریعہ
۶۸۶، ۶۷۳	میکلوون کے مسئلہ کے ذریعہ
۶۵۲	تفرق، قوتی سلسلہ کا
۵۲۱	تفرقی مساواتیں
۵۲۳	پہلے درجہ اور پہلے رتبہ کی
۵۲۵	پہلے رتبہ اور اعلیٰ درجہ کی
۵۳۰	ٹھیک
۵۳۹، ۵۳۵	خطی

۵۶۳	دوسرے رتبہ کی
۶۵۵	سلسلوں کے ذریعہ مکمل
۵۳۳	متجانس
۶۱۸	ہمزاد
۶۵۴	مکمل، قوتی سلسلوں کا
۷۱۰	ٹھیک تفرقی، اسکی شرط
۵۳۰	ٹھیک تفرقی مساواتیں
۶۷۱	نیلر کا مسئلہ
۷۱۱	اس کی توسیع
۶۵۷	جب لا کا پھیلاؤ
۶۵۴	جب لا کا پھیلاؤ
۷۱۳	جزوی تفرق کی خاصیت مبادلہ
۵۳۹	خطی تفرقی مساواتیں پہلے رتبہ کی
۵۷۸	دوسرے رتبہ کی
۵۹۰	مستقل سروں والی
۵۲۵	درجہ تفرقی مساوات کا
۵۲۱	رتبہ تفرقی مساوات کا
۵۲۹	زنجیرہ مکانی
۶۹۶	صغاری ہندسہ
۶۴۵	قیمت کی
۶۵۱	قوتی سلسلہ کا تسلسل
۶۵۲	اس کا تفرق
۶۵۴	اس کا مکمل
۵۴۱	قائم خطوط رمی
۵۴۷	کلیدی تفرقی مساوات

۶۴۴	گرگوری کا سلسلہ
۷۲۵	لفاف
۹۸۹، ۶۳۹	لوکارٹی سلسلہ
۷۱۶	تجائش تفاعل، یور کا مسئلہ
۶۰۴، ۵۹۱، ۵۷۹	مستم تفاعل، ۵۳۶
	متواتر تفرق، ۷۰۶
۶۸۷	مسئلہ ثنائی، ۶۶۰
۷۲۲، ۷۱۶	مقیم قیمتیں، تفاعلوں کی
۶۸۳، ۶۷۷، ۶۷۱	میکلورن کا مسئلہ
۵۴۸	نادر حل
۷۲۰	ہم ارتفاعی خط
۶۱۸	ہمزاد تفرقی مساواتیں









